SISTEMAS DE NUMERACION PARA LOS NUMEROS RACIONALES

National Council of Teachers of Mathematics

Trillas

TEMAS DE MATEMATICAS

7. SISTEMAS DE NUMERACION PARA LOS NUMEROS RACIONALES

El contenido de este cuaderno es un estudio elemental de los sistemas de representación de los números racionales. Insiste nuevamente, en forma indirecta, en la diferencia entre número y numeral. Hace un resumen de las propiedades más importantes de los números racionales comparándolos con las de los números enteros. Estudia el concepto de fracción, par ordenado, clase de equivalencia, etcétera. También estudia los numerales decimales periódicos y no periódicos y su relación con los racionales.

Este cuaderno es uno de la serie de ocho, escrita para maestros de enseñanza elemental y media, y alumnos de este último ciclo. Cada cuaderno comprende la exposición de un tema básico de matemáticas. Estos temas se hallan entre los que el maestro necesita dominar para tener una comprensión más cabal de la matemática.

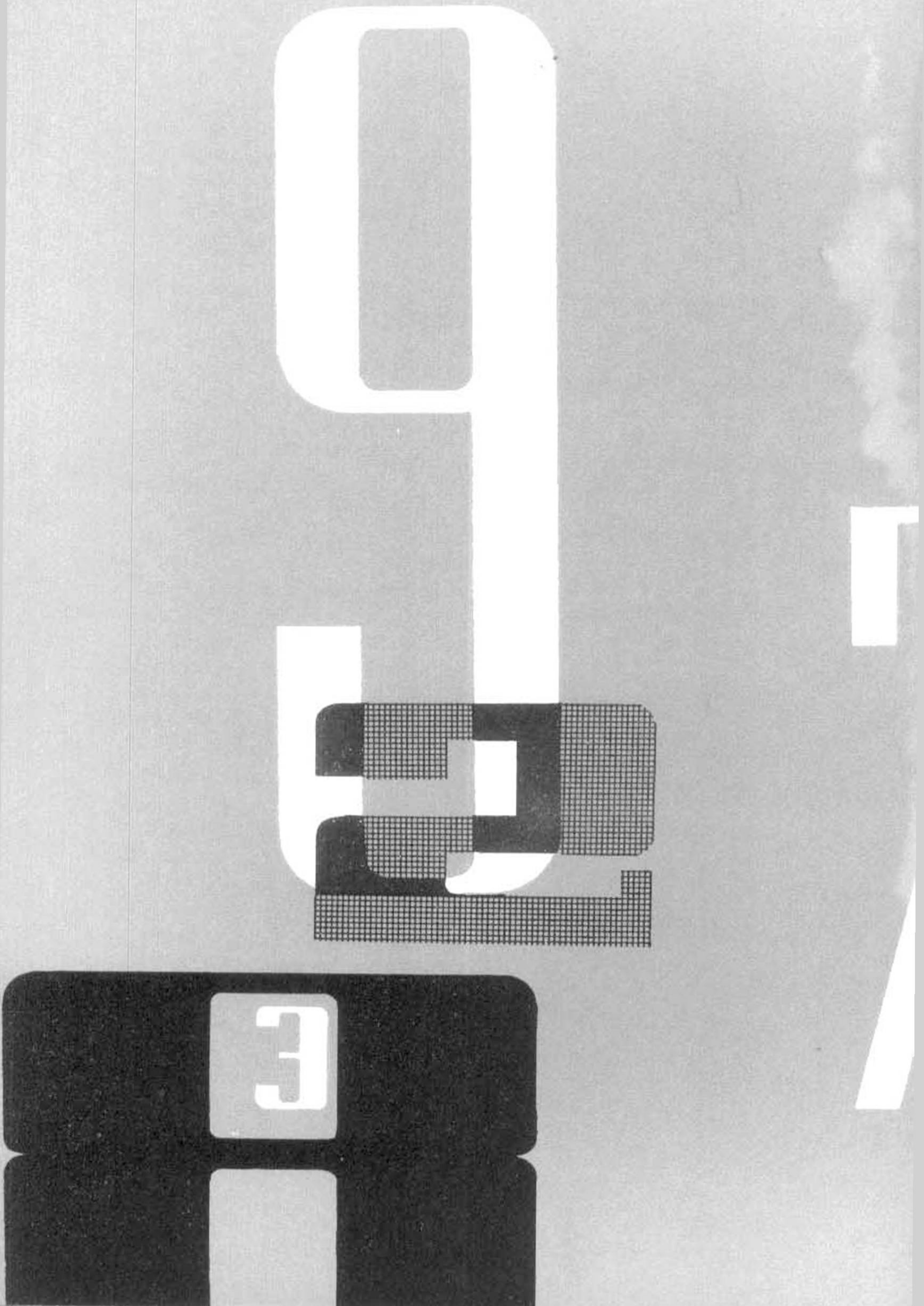
Los temas escogidos son especialmente importantes para aquellos maestros que consideran que las experiencias de aprendizaje transmitidas a los niños del ciclo elemental deberían empezar por el desarrollo de algunos conceptos unificadores básicos en matemáticas, y para los alumnos de nivel medio y superior que deseen comprender más a fondo los conceptos básicos de la matemática tratados en cada uno de estos cuadernos. Es el deseo de los autores y del NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) que esta serie de cuadernos pueda auxiliar tanto a los maestros en su cátedra, como a los alumnos en su aprendizaje.

Los títulos de los cuadernos de esta colección son: 1. Conjuntos. 2. Números

Temas

Colección de

matemáticas



Sistemas de numeración para los números racionales

7

National Council of
Teachers
of Mathematics
U.S.A.

traducción de
Federico Galván Anaya
profesor de matemáticas
de la U.N.A.M.

Editorial F. Trillas, S. A.
México, 1968

Título de esta obra en inglés:
Topics in Mathematics for Elementary School Teachers
Booklet Number 7. Numeration Systems for the Rational Numbers

Tercera reimpresión en inglés: 1965

Primera edición en español: 1968

Miembro de la Cámara Nacional de
la Industria Editorial. Reg. núm. 158

Impreso en México

Prefacio

Este cuaderno es uno de la serie de ocho, escrita para maestros de enseñanza elemental más bien que para los alumnos. Cada cuaderno comprende la exposición de un tema básico de matemáticas. Estos temas se hallan entre los que el maestro de enseñanza elemental necesita dominar para tener una comprensión más cabal de la matemática que usualmente se enseña en la escuela de ese grado. Cada cuaderno es la introducción a un tema, no un tratado exhaustivo. El lector interesado debe estudiar el tema con mayor profundidad en otras obras.

Los temas escogidos son especialmente importantes para aquellos maestros que creen que las experiencias de aprendizaje, trasmitidas a los niños en los primeros años de la escuela, deberían empezar por el desarrollo de algunos conceptos unificadores básicos en matemáticas. Muchos profesores han encontrado que su educación profesional no los prepara para enseñar aritmética de modo congruente con este punto de vista. Es el deseo de los autores y del NCTM (National Council of Teachers of Matematics) que esta serie de cuadernos pueda ser una ayuda para estos profesores, así como para otros que también están interesados en mejorar su instrucción.

Los títulos de los cuadernos de esta serie son:

Cuaderno 1. *Conjuntos*
Cuaderno 2. *Números enteros*
Cuaderno 3. *Sistemas de numeración para los números enteros*
Cuaderno 4. *Algoritmos de las operaciones con números enteros*
Cuaderno 5. *Números y sus factores*
Cuaderno 6. *Números racionales*
Cuaderno 7. *Sistemas de numeración para los números racionales*
Cuaderno 8. *Proposiciones numéricas*

Aconsejamos que, si es posible, los cuadernos sean leídos en el orden numérico correspondiente, con excepción del octavo (Proposiciones numéricas), que puede apartarse del orden citado.

Escribieron los cuadernos los miembros de un grupo de verano (Summer Writing Group) cuyos nombres se indican en la lista inserta al final del prefacio. El proyecto fue iniciado y patrocinado por el Comité Suplementario de Publicaciones del NCTM (The NCTM Supplementary Publications Committee) bajo la presidencia de Kenneth B. Henderson. Fue financiado por el NCTM.

EDWIN F. BECKENBACH
HELEN CURRAN
WALTER FLEMING
GERALDINE GREEN
LOLA MAY
MARLENE SCHROEDER
MARGARET F. WILLERDING
WILLIAM WOOTON
LENORE JOHN, *Coordinadora*

Indice

Sistemas de numeración para los números racionales

Cuaderno 7

Introducción

En el cuaderno 6, *Números racionales,* investigamos y desarrollamos nuestra noción intuitiva de lo que son los números racionales y estudiamos el significado y las propiedades básicas de las operaciones con estos números. A este propósito, empleamos fracciones de la forma $\frac{a}{b}$ donde a y b son números enteros con $b \neq 0$, como símbolos para los números racionales.

Para los números racionales y también para los enteros, se han dado diferentes sistemas de símbolos. Esto es en parte resultado del desarrollo histórico de nuestro tiempo y nuestra noción de número. Sin embargo, esto es asunto de conveniencia; un sistema de numeración es más sugestivo y útil para un propósito y otro sistema es preferible para distinto objeto.

En este cuaderno investigamos varios sistemas de numeración de los números racionales, destacando algunas de las ventajas que se obtienen de las diferentes representaciones.

Números racionales

Empezaremos con un breve examen de las propiedades del sistema de números racionales. Para esto tendremos que usar, desde luego, algún sistema de numeración; esto es, algún tipo de símbolos que representen a los números racionales. Emplearemos fracciones tales como $\frac{3}{4}$ y $\frac{9}{5}$ puesto que son convenientes para este propósito.

Supongamos que en un conjunto de números, al dividirse números enteros entre sí —pero no el cero— se obtiene un número para cociente, entonces estamos postulando la existencia del conjunto de los números racionales. Para ser más precisos, estamos suponiendo la existencia del conjunto de los números racionales no negativos, y puesto que no deseamos tratar con números negativos en este cuaderno, acordaremos que a menos que se indique otra cosa, ninguno de los números que se traten aquí será negativo.

Supongamos que siempre podemos dividir números enteros entre otros enteros distintos de cero, tenemos ahora números tales como $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{3}$, y $\frac{0}{9}$ así como números racionales que pueden identificarse con los números enteros ya conocidos: $\frac{16}{4}$ (4), $\frac{18}{3}$ (6), y $\frac{100}{4}$ (25). Puede considerarse al conjunto de los números enteros como un subconjunto de los números racionales.

¿De qué manera o modos difieren los números racionales de los números enteros en su comportamiento respecto a las operaciones conocidas de adición y multiplicación? Para responder a esta pregunta, transformémosla, primero, viendo las cosas en que *no* difieren:

1. Tanto el sistema de números racionales como el de números enteros son *cerrados* respecto a la adición y a la multiplicación. Esto es, la suma o el producto de dos números racionales cualesquiera es un número racional, así como la suma y el producto de dos números enteros es un número entero.

2. La adición y la multiplicación son operaciones *conmutativas* en el sistema de los números racionales, así como en el sistema de los números enteros. El orden en que se colocan los sumandos en la suma de dos números racionales (también de dos números enteros), o el orden en el que se colocan los factores del producto de dos números racionales (o también de dos números enteros) no altera la suma o el producto. Por ejemplo, $\frac{2}{3}+\frac{3}{7}$ es igual a $\frac{3}{7}+\frac{2}{3}$ así como $2+3=3+2$.

3. La suma y la multiplicación son operaciones *asociativas,* tanto en el sistema de los números racionales como en el sistema de los números enteros. Los sumandos en una suma o los factores en un producto pueden, en ambos casos, agruparse como se desee. Por ejemplo,

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$$

puede interpretarse como

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}$$

o como

$$\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right),$$

en donde los paréntesis indican los números cuya suma debe efectuarse primero; el resultado final es el mismo en ambos casos. Desde luego, esto también es verdadero en cuanto a los números enteros, por ejemplo: $2+3+7$ puede interpretarse como $(2+3)+7$ ó como $2+(3+7)$.

También. $\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{4}=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\right)$ y $(2\times 3)\times 7=2\times(3\times 7)$.

4. La multiplicación es *distributiva* sobre la adición en ambos sistemas. Entonces,

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\right)$$

expresa el mismo número que

$$\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\right),$$

así como $2\times(3+5)$ es igual a $(2\times 3)+(2\times 5)$.

5. Ambos sistemas tienen elemento *aditivo idéntico.* Un elemento aditivo idéntico es simplemente un elemento en un sistema numérico, que es "neutral" como sumando en la suma. En el sistema de los números racionales 0 desempeña ese oficio, así como también lo desempeña en el sistema de los números enteros. Entonces,

$$\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2},$$

así como

$$8+0=8.$$

6. Ambos sistemas tienen elementos *multiplicativos idénticos.* Un elemento multiplicativo idéntico es un elemento "neutral" como factor en el producto. El número uno desempeña ese oficio tanto en el sistema de los números racionales como en el sistema de los números enteros. Por ejemplo,

$$\frac{2}{3}\times 1=\frac{2}{3},$$

así como

$$5\times 1=5.$$

Es evidente que el sistema de los números racionales y el sistema de los números enteros tiene varias propiedades fundamentales en común. Realmente, sólo hay una forma básica en la que difieren: cada elemento diferente de cero del conjunto de los números racionales tiene un *multiplicativo inverso* o *recíproco,* como se le llama algunas veces. Un multiplicativo inverso b para un número dado a es un número tal que el producto de los dos números a y b es el elemento multiplicativo idéntico. Por ejemplo, el multiplicativo inverso del número racional $\frac{3}{4}$, porque $\frac{4}{3}$ es el número racional $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1$. Observe que la existencia de un recíproco por cada elemento (excepto 0) en el sistema de los números racionales es una característica que no tiene el sistema de los números enteros. Por ejemplo, no hay número entero que multiplicado por 3 su producto sea 1. Esto es, no hay número entero n tal que $3 \times n = 1$.

Las propiedades de los números racionales que se discutieron anteriormente son fundamentales en el sentido en que rigen todas las operaciones con números racionales y, en consecuencia —tal vez más importante desde el punto de vista del maestro de enseñanza elemental— todas las operaciones que ejecutamos con las fracciones y otros símbolos que expresan estos números.

De paso, hagamos un breve comentario sobre los *números negativos.* Observamos que tanto el sistema de los números enteros como el sistema de los números racionales, tienen un elemento aditivo idéntico (0) y un elemento multiplicativo idéntico (1). El multiplicativo inverso b para un número dado a es un número tal que el *producto* de los dos números es el elemento idéntico para la *multiplicación* $a \times b = 1$. Entonces, por analogía el *aditivo universo* de un número dado c debe ser un número tal que la *suma* de los dos números sea el elemento idéntico de la *adición:* $c + d = 0$. El sistema de los números racionales (no negativos) puede considerarse como una extensión del sistema de los números enteros * (no negativos) a un sistema en el que cada número (diferente de cero) tiene un multiplicativo inverso. En la misma forma, el sistema de los enteros

* Recuerde que en inglés se tienen dos vocablos diferentes para clasificar el conjunto completo de los enteros

$$\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

al que le llaman *integers,* y al conjunto de los enteros no negativos

$$\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

al que le llaman *whole numbers.* Como no tenemos dos vocablos para estos conjuntos, cuando haya necesidad de distinguirlos los llamaremos simplemente *enteros.* al primero, y al segundo *enteros no negativos;* desde luego, debe tomarse en cuenta que en esta serie de cuadernos se maneja en general el segundo conjunto, y por motivos prácticos se les llama únicamente números enteros. [N. del T.]

$$\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

es la extensión del sistema de los enteros (no negativos) a un sistema en el que cada número tiene un *aditivo* inverso, y de manera semejante el sistema completo de los números racionales es una extensión del sistema de los números racionales no negativos. En este cuaderno estamos interesados únicamente en el sistema de los números racionales no negativos.

Los números y sus expresiones

Un número racional, así como un número entero, es una abstracción. Podemos manejar los números racionales asignándoles símbolos, tal como lo hacemos con los números enteros. Sin embargo, hay una mayor variedad de expresiones y símbolos para representar a los números racionales que los que se tienen para representar a los números enteros. También al estudiar los números racionales y sus propiedades, estamos casi tan interesados en las propiedades de los símbolos como en los números mismos.

Entre las diversas representaciones de los números racionales que se emplean actualmente, tenemos las siguientes:

1. Fracciones, tales como $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{5}$, y $\frac{23}{2}$
2. Pares ordenados tales como (2, 3), (1, 7), y (15, 6);
3. Numerales mixtos, tales como $1\frac{5}{7}$, $23\frac{1}{2}$, y $4\frac{5}{8}$;
4. Numerales decimales, tales como 0.217, 0.333 y 5.5.

Cada una de estas formas de numeración tiene algunos aspectos útiles, y ciertas aplicaciones específicas en las que es más propia que cualquiera de las otras. Examinemos cada una de estas formas de simbolismo con más detalle.

Fracciones

El símbolo $\frac{3}{5}$, que se emplea para expresar el número racional tres quintos, es ejemplo de una fracción. El número entero representado en la parte superior de la fracción se llama *numerador* de la fracción, y el número natural representado en la parte inferior se llama *denominador* de la fracción. Observe que la fracción se define aquí como un *símbolo* (numeral), mientras que el numerador y el denominador se definen como números. Esto se debe a que deseamos efectuar operaciones que implican numeradores y denominadores y nuestras operaciones se definen en relación a los números y no en relación a los símbolos. Realmente el uso de la palabra "fracción" se reducirá al mínimo, puesto que estamos interesados en trabajar con números racionales representados por las fracciones, en lugar de trabajar con la fracción misma.

Conceptualmente, las fracciones con números enteros como numeradores y con números enteros, diferentes de cero, como denominadores, pueden interpretarse como expresiones de cocientes de números enteros (vea el cuaderno 6: *Números racionales*). De acuerdo con esto, "numerador" y "dividendo" son sinónimos; y también lo son "denominador" y "divisor". Entonces $\frac{3}{5}$ es el número racional representativo del cociente obtenido cuando 3 se divide entre 5. Además, si los números racionales se definen como cocientes de números enteros, entonces el conjunto de los números enteros viene a ser un subconjunto propio del conjunto de los números racionales. Esto es cierto, puesto que para cualquier número entero *a*, el cociente que se obtiene cuando *a* se divide entre 1 es *a* y por tanto todo número entero puede considerarse como el cociente de dos números enteros. De hecho, todo número entero es un cociente de dos números enteros, que se puede expresar mediante un número infinito de formas, puesto que

$$\frac{2}{1}=2, \frac{4}{2}=2, \frac{6}{3}=2, \frac{8}{4}=2,$$

y así, sucesivamente, las fracciones $\frac{2}{1}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{6}{3}$, y $\frac{8}{4}$ expresan todas el mismo número, el número entero 2.

En general, *es preferible emplear fracciones como símbolos de los números racionales, cuando estos números se toman como cocientes de números enteros.*

La figura 1 muestra un eje numérico con varias expresiones de algunos números racionales indicados en él. En esta figura, los símbolos asociados con el mismo punto son expresiones del mismo número.

El criterio que nos permite identificar fracciones que expresen un mismo número racional, es el siguiente.*

* Para una discusión más amplia de las propiedades de los números racionales empleados en términos de fracciones, ver el cuaderno 6: *Números racionales.*

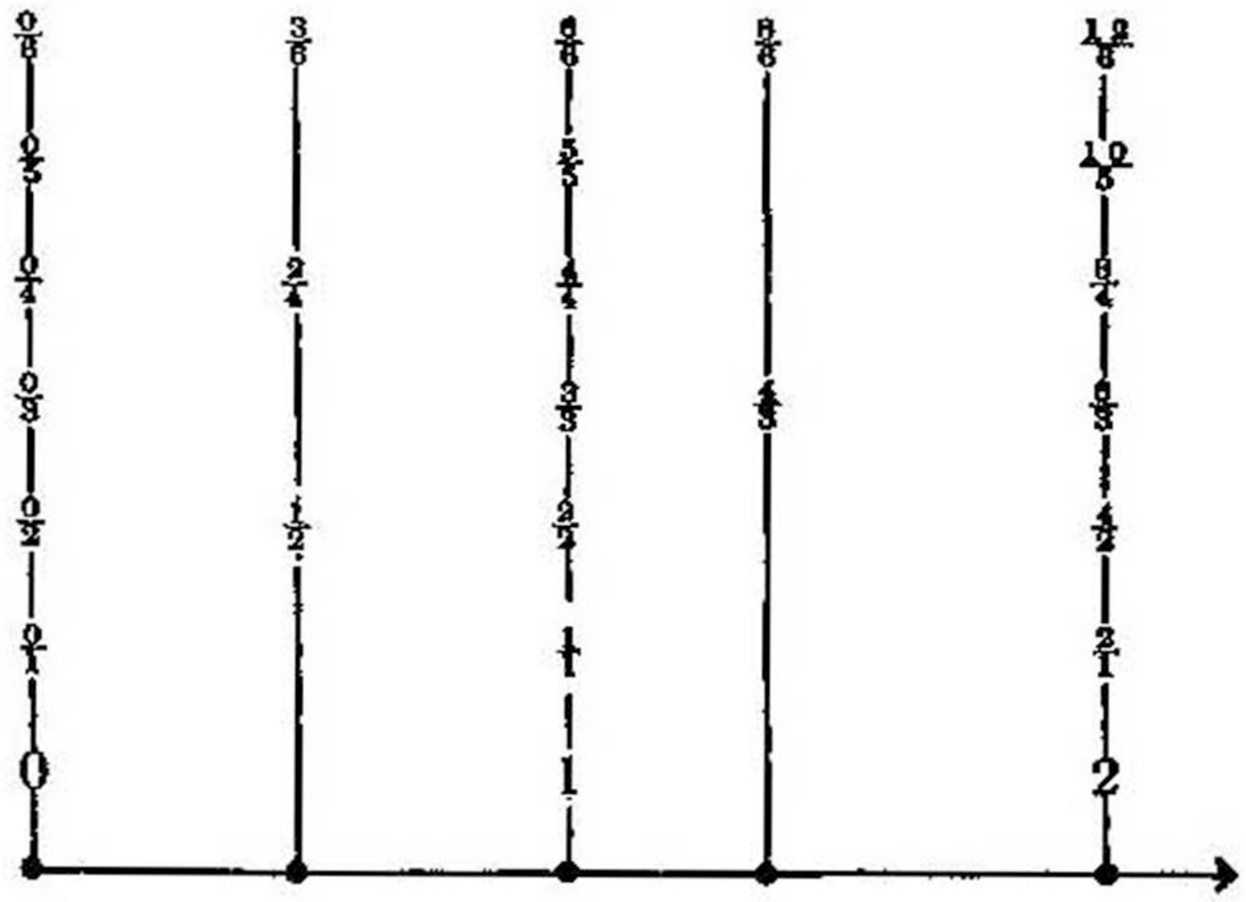


FIGURA 1

Si a, b, c y d son números enteros y b y d son diferentes de cero, entonces:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

si y sólo si, $a\times d=b\times c$.

Entonces $\frac{12}{28}=\frac{18}{42}$ puesto que $12\times 42=28\times 18$. Observe que esta prueba depende de que, por ejemplo,

$$\frac{12}{28}=\frac{42\times 12}{42\times 28} \quad \text{y} \quad \frac{18}{42}=\frac{18\times 28}{42\times 28}.$$

De manera más general: $\frac{a}{b}$ es menor que, igual a, o mayor que $\frac{c}{d}$ siempre que $a\times d$ sea menor que, igual a, o mayor que $b\times c$.

Grupo de ejercicios 1

1. Exprese cuál es la propiedad ejemplificada en cada una de las siguientes proposiciones verdaderas.

PROPOSICIÓN	PROPIEDAD
$\frac{3}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{3}{4}$	______________
$\frac{5}{6}\times\frac{3}{7}=\frac{3}{7}\times\frac{5}{6}$	______________
$\frac{7}{8}\times 1=\frac{7}{8}$	______________
$\frac{9}{11}+0=\frac{9}{11}$	______________
$2\times\left(6+\frac{1}{2}\right)=(2\times 6)+\left(2\times\frac{1}{2}\right)$	______________
$\frac{7}{8}\times\frac{8}{7}=1$	______________
$\left(\frac{3}{5}+\frac{5}{7}\right)+\frac{5}{9}=\frac{3}{5}+\left(\frac{5}{7}+\frac{5}{9}\right)$	______________

2. Complete los siguientes enunciados:

a) Los números racionales representados por $\frac{6}{7}$ y $\frac{8}{9}$ pueden expresarse mediante fracciones que tengan el mismo denominador $\frac{6}{7}=$______ y $\frac{8}{9}=$______.

b) Empleando las fracciones de iguales denominadores del ejercicio 2 *a*), podemos expresar que ______ < ______.

c) Empleando sólo los numeradores de las fracciones del ejercicio 2 *b*) podemos asegurar que ______ < ______.

d) Esto significa que para probar si es verdad que $\frac{6}{7} < \frac{8}{9}$, o no, es suficiente probar si es o no verdad que ______ < ______.

3. Complete los siguientes enunciados.

a) Los números racionales representados por $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{7}$ pueden expresarse mediante fracciones que tengan el mismo denominador. $\frac{3}{5}=$______ y $\frac{4}{7}=$______.

b) Empleando las fracciones de iguales denominadores del ejercicio 3 *a*), podemos asegurar que ______ > ______.

c) Empleando sólo los numeradores de las fracciones del ejercicio 3 *b*) podemos asegurar que ______ > ______.

d) Esto significa que para probar si es verdad que $\frac{3}{5} > \frac{4}{7}$, o no, es suficiente probar si es o no verdad que ______ > ______.

4. Las fracciones $\frac{2}{6}$ y $\frac{5}{15}$ representan el mismo número racional porque ______ × ______ = ______ × ______.

5. Llene los espacios con el signo adecuado =, >, o <, de tal manera que se obtengan enunciados verdaderos; y aplique para probarlos el "método de producto en cruz" que se empleó en los ejercicios 2, 3 y 4.

a) $\frac{2}{3}$ ______ $\frac{3}{4}$ c) $\frac{5}{11}$ ______ $\frac{3}{7}$ e) $\frac{5}{2}$ ______ $\frac{15}{6}$

b) $\frac{4}{9}$ ______ $\frac{12}{27}$ d) $\frac{7}{3}$ ______ $\frac{11}{5}$ f) $\frac{8}{13}$ ______ $\frac{5}{17}$

Pares ordenados

Un segundo medio para representar números racionales se tiene a partir de la noción de *par ordenado* de números enteros. Un par ordenado de números enteros es, simplemente, un par de números enteros para los que el orden en el que se consideran los números es de importancia. Los pares ordenados se expresan por representaciones tales como (2, 3), donde el paréntesis y la coma indican que los números se consideran en determinado orden, primero 2 y después 3 en este caso. Los números que aparecen en un par ordenado se llaman *componentes* del par. En el par ordenado (2, 3), 2 es la primera componente, y 3 la segunda.

Los matemáticos suelen definir un número racional mediante pares ordenados de números enteros, en que ningún par ordenado tiene el cero como segunda componente. Desde este punto de vista, el número racional simbolizado por la fracción $\frac{3}{5}$ puede también expresarse mediante el par ordenado (3, 5). La primera componente del par ordenado corresponde al numerador de la fracción, y la segunda componente corresponde al denominador. Como se trata de una abstracción conviene interpretar de algún modo a esos pares de la misma forma que se siguió para la representación de los números por fracciones. Por ejemplo (3, 5) puede interpretarse en los siguientes términos: "Tres de cinco partes congruentes de un *todo*" o como "el cociente que se obtiene cuando 3 se divide entre 5" o de alguna otra manera similar.

Así como muchas fracciones expresan a un mismo número racional, muchos pares ordenados también corresponden a un mismo número racional. Podemos definir la igualdad de dos pares ordenados (representativos de un mismo número racional) de manera análoga a la de las fracciones. Por ejemplo, tenemos $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$, porque $2\times 9=3\times 6$. De igual modo, en términos de pares ordenados tenemos $(2, 3)=(6, 9)$, porque $2\times 9=3\times 6$; esto es, los productos de la primera componente de cada par por la segunda componente del otro, son iguales. Lo anterior podemos expresarlo como sigue:

> Si a, b, c, y d son números enteros y, además, si ni b ni d son 0, entonces
>
> $$(a, b)=(c, d)$$
>
> si, y solo si, $a\times d=b\times c$.

Estos productos pueden representarse esquemáticamente por un diagrama como el de la figura 2, donde las líneas unen los factores de cada uno de los productos.

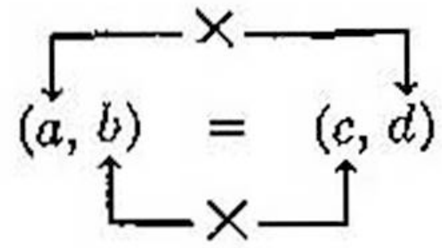


FIGURA 2

Ahora, si queremos saber si el enunciado $(3, 21)=(9, 56)$ es verdadero o no lo es, efectuamos las operaciones 3×56 y 21×9 para comprobar si los productos resultantes son iguales o no; como $3\times 56=168$, y $21\times 9=189$, el enunciado es falso.

En general, (a, b) es menor que, igual a, o mayor que (c, d) si $a\times d$ es menor que igual a, o mayor que $b\times c$.

El cuadro I muestra las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división con algunos ejemplos específicos en los que los números racionales que se emplean están representados por fracciones y también por pares ordenados.

CUADRO I

Operación	*Fracciones*	*Pares ordenados*
$+$	$\frac{1}{7}+\frac{3}{7}=\frac{1+3}{7}=\frac{4}{7}$	$(1,7)+(3,7)=(1+3,7)=(4,7)$
$-$	$\frac{13}{17}-\frac{7}{17}=\frac{13-7}{17}=\frac{6}{17}$	$(13,17)-(7,17)=(13-7,17)=(6,17)$
$+$	$\frac{1}{3}+\frac{3}{5}=\frac{5}{15}+\frac{9}{15}=\frac{14}{15}$	$(1,3)+(3,5)=(5,15)+(9,15)=(14,15)$
$-$	$\frac{8}{7}-\frac{2}{3}=\frac{24}{21}-\frac{14}{21}=\frac{10}{21}$	$(8,7)-(2,3)=(24,21)-(14,21)=(10,21)$
$\times$	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{7}=\frac{3\times 2}{5\times 7}=\frac{6}{35}$	$(3,5)\times(2,7)=(3\times 2,5\times 7)=(6,35)$
$\div$	$\frac{3}{5}\div\frac{2}{7}=\frac{3\times 7}{5\times 2}=\frac{21}{10}$	$(3,5)\div(2,7)=(3\times 7,5\times 2)=(21,10)$

CUADRO II

Fracciones	*Pares ordenados*
$\frac{a}{b}=\frac{a\times c}{b\times c}$ $(b, c\neq 0)$	$(a,b)=(a\times c, b\times c)$ $(b, c\neq 0)$
$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$ $(b\neq 0)$	$(a,b)+(c,b)=(a+c,b)$ $(b\neq 0)$
$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$ $(b\neq 0)$	$(a,b)-(c,b)=(a-c,b)$ $(b\neq 0)$
$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{(a\times d)+(b\times c)}{b\times d}$ $(b, d\neq 0)$	$(a,b)+(c,d)=[(a\times d)+(b\times c), b\times d]$ $(b, d\neq 0)$
$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{(a\times d)-(b\times c)}{b\times d}$ $(b, d\neq 0)$	$(a,b)-(c,d)=[(a\times d)-(b\times c), b\times d]$ $(b, d\neq 0)$
$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$ $(b, d\neq 0)$	$(a,b)\times(c,d)=(a\times c, b\times d)$ $(b, d\neq 0)$
$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\times d}{b\times c}$ $(b, c, d\neq 0)$	$(a,b)\div(c,d)=(a,b)\times(d,c)=(a\times d, b\times c)$ $(b, c, d\neq 0)$

Para comparar de manera más general las dos formas de representación de los números racionales ver el cuadro II en el que se enlistan, en ambas formas, algunas propiedades básicas. En todos los casos, a, b, c y d, representan números enteros.

En general, *es preferible emplear pares ordenados como símbolos para los números racionales, cuando investigamos la estructura algebraica formal de este sistema.*

Grupo de ejercicios 2

1. Los números racionales del cuadro III están representados por fracciones. Represéntelos por pares odenados.
2. Si queremos comprobar la realidad del enunciado $(5, 12) = (4, 11)$, efectuamos las operaciones (5×11) y (12×4) que nos indicará si son iguales o no, mediante fracciones exprese los números racionales indicados por $(5, 12)$ y $(4, 11)$ y emplee esas fracciones para escribir una ecuación o una inecuación verdadera.
3. Exprese con fracciones los números racionales representados por pares ordenados en el cuadro IV y ejecute las operaciones básicas indicadas, empleando fracciones.

Cuadro III

Fracciones	*Pares ordenados*
$\frac{4}{7}$	
$\frac{9}{5}$	
$\frac{3}{1}$	
$\frac{0}{8}$	
$\frac{5}{9}$	
$\frac{3}{8}$	

CUADRO IV

Pares ordenados	*Fracciones*
$(2, 7) + (3, 7) = (2+3, 7) = (5, 7)$	
$(3, 4) - (2, 3) = (9-8, 12) = (1, 12)$	
$(6, 5) \times (1, 7) = (6\times 1, 5\times 7) = (6, 35)$	
$(3, 4) \div (5, 11) = (3\times 11, 4\times 5) = (33, 20)$	

Números racionales como clases de equivalencia

Antes de fijarnos en otra forma de representación de los números racionales, hagamos una exposición un poco más profunda de la definición de un número racional mediante el empleo de pares ordenados, una exposición basada en los conceptos de la teoría de conjuntos. (Para una discusión de los conceptos de la teoría de conjuntos y la notación empleada aquí, ver el cuaderno 1: *Conjuntos.*)

Definamos primero lo que se entiende por pares ordenados *equivalentes:*

> *El par ordenado* (a, b), $b \neq 0$, *es equivalente al par ordenado* (c, d) $d \neq 0$, *si, y sólo si,* $a\times d = b\times c$.

Entonces $(2, 3)$ es equivalente a $(6, 9)$ porque $2\times 9 = 3\times 6$. Observe que ésta es la misma condición que se impuso antes para la igualdad de números racionales representados por pares ordenados. Sin embargo, ahora queremos llamar a $(2, 3)$ y $(6, 9)$ pares ordenados equivalentes.

Después, considérese el conjunto de pares ordenados

$$\{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), \ldots\},$$

en que los tres puntos dentro de las llaves indican que la lista de pares ordenados continúa indefinidamente. Observe que cada uno de los pares ordenados de este conjunto es equivalente a cualquier otro par ordenado del mismo conjunto. Por tanto, $(1, 2)$ es equivalente a $(3, 6)$ porque $1\times 6 = 2\times 3$; $(1, 2)$ es equivalente a $(4, 8)$ porque $1\times 8 = 2\times 4$; $(2, 4)$ es equivalente a $(3, 6)$ porque $2\times 6 = 4\times 3$, y así sucesivamente. A este tipo de conjuntos de pares ordenados equivalentes se le llama *clase de equivalencia.* Otra clase de equivalencia es

$$\{(3, 4), (6, 8), (9, 12), (12, 16), \ldots\},$$

y otra es

$$\{(7, 3), (14, 6), (21, 9), (28, 12), \ldots\}.$$

Además, observe que la segunda componente de un par ordenado es una clase de equivalencia, nunca es cero.

Ahora podemos definir los números racionales de la siguiente manera:

Un número racional es una clase de equivalencia de pares ordenados de números enteros.

¿Parece esto muy abstracto? Entonces, interprétese el problema de esta manera: El conjunto de todos los pares ordenados de números enteros, cuya segunda componente no sea igual a cero, puede distribuirse en clases. Imagínese una banda en movimiento, que enfrente de una persona se detiene mientras transporta pares ordenados (a, b) de números enteros, en que $b \neq 0$. Al pasar cada par ordenado enfrente de la persona (llamémosla "acomodador") ésta los inspecciona y distribuye en el lugar que le corresponde en una caja, ocupando un determinado hueco. La figura 3 ilustra esa operación. Desde luego, la analogía que intentamos aquí no es completa, porque tendría que haber un número infinito de huecos en la caja y, además, la banda no dejaría jamás de producir pares ordenados, pero conceptualmente esto describe la separación del conjunto de todos los pares ordenados de números enteros, con la segunda componente diferente de cero, en subconjuntos diferentes y separados. Cada uno de estos huecos de la caja corresponde a una clase de equivalencia, y el acomodador determina el que sea apropiado para colocar un par ordedo que se dé, observando los pares ordenados a los que es equivalente. El contenido de cada hueco es lo que hemos definido como número racional.

Cualquier miembro (par ordenado) de una clase de equivalencia (número racional) puede usarse para simbolizar a dicha clase. Por ejemplo, se puede simbolizar al número racional que contiene a $(1, 2)$, empleando $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 6)$ o cualquier otro par ordenado de esa clase. Un enunciado tal como es

$$(1, 2) = (6, 12)$$

es simplemente la afirmación de que "$(1, 2)$" y "$(6, 12)$" simbolizan al mismo número racional.

Esta forma de definir el número racional como una clase de equivalencia de pares ordenados no altera ninguna de las consideraciones que hicimos antes, acerca de las operaciones con números racionales, sino que simplemente da un significado más preciso del término "número racional".

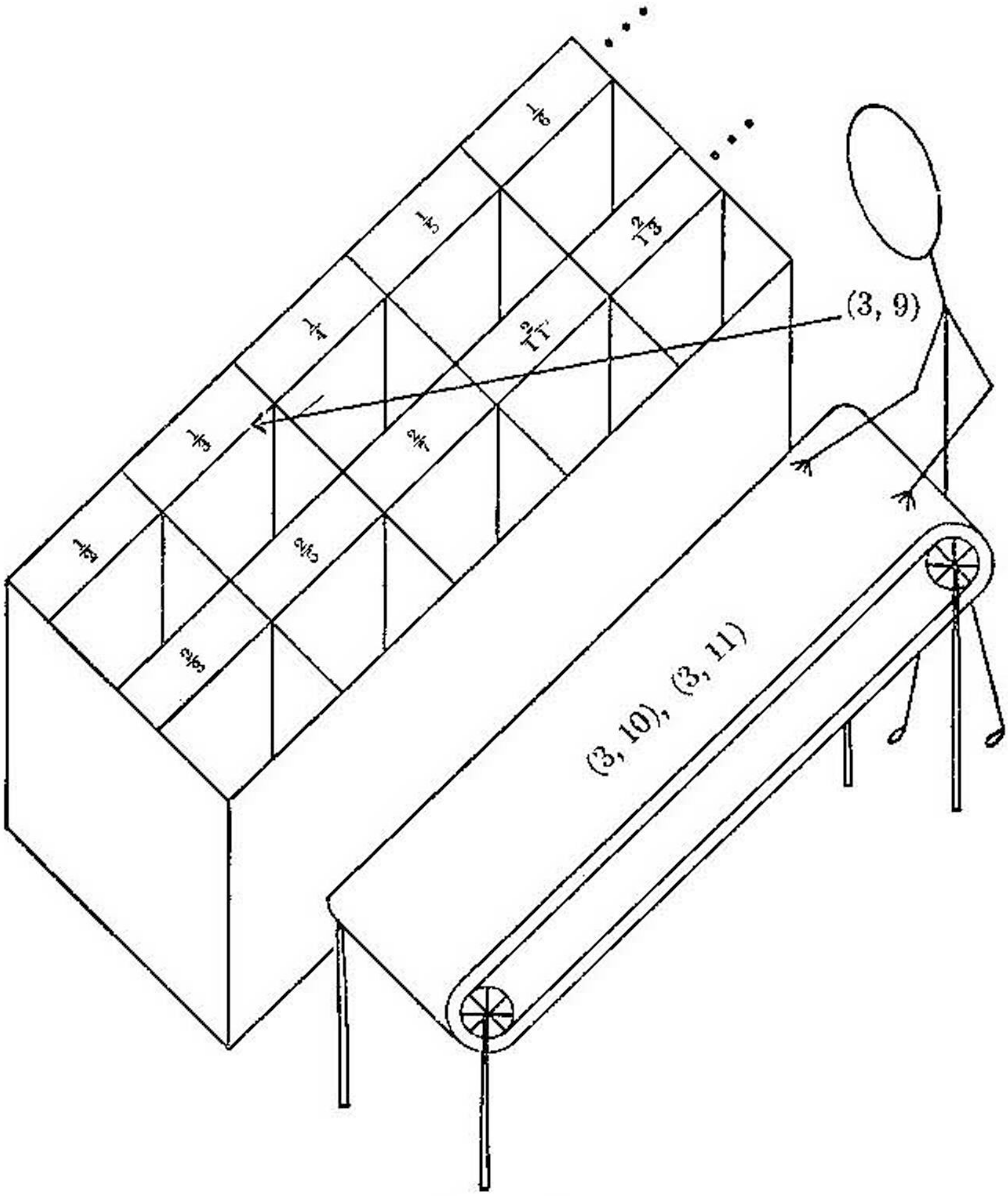


FIGURA 3

En realidad, no hay razón por la que los pares ordenados de una clase de equivalencia no puedan escribirse en forma fraccionaria. Entonces

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8} \cdots\right\}$$

simboliza la misma clase de equivalencia que

$$\{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), \ldots\}.$$

Numerales mixtos

Los números racionales están *ordenados*. Esto es, entre dos números racionales cualesquiera, diferentes entre sí, siempre puede decirse que uno es menor que el otro (ver el cuaderno 6: *Números racionales*). Entonces, podemos dividir al conjunto de los números racionales en dos conjuntos disjuntos, uno, que contenga los números racionales menores que uno, y otro, que contenga a los números racionales mayores o iguales a uno, La figura 4 muestra estos subconjuntos representados en el eje numérico.

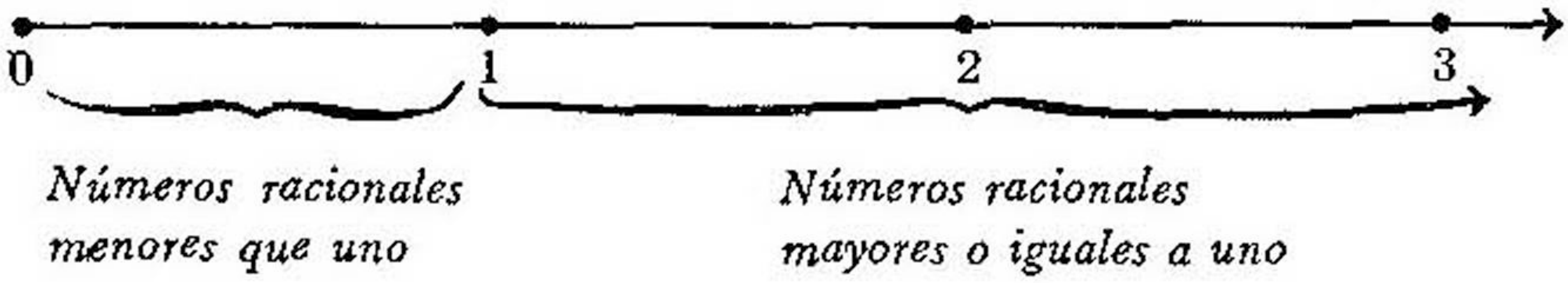


FIGURA 4

Podemos distinguir entre las fracciones (o pares ordenados) que simbolizan a números racionales menores que uno; y las fracciones que simbolizan a números racionales mayores o iguales a uno, observando si el numerador (o primera componente) es menor, igual o mayor que el denominador (o segunda componente). Una fracción que tenga numerador menor que su denominador, representa a un número racional menor que uno. A este tipo de fracciones se les llamaba antiguamente *fracciones propias;* sin embargo, esta frase empieza a caer en desuso. Una fracción cuyo numerador sea mayor que, o igual a su denominador, simboliza a un número racional mayor que, o igual a uno, respectivamente; a estas fracciones se les llamaba *fracciones impropias.*

Todo número racional que se simboliza por una fracción en la que el numerador es mayor o igual al denominador es un número entero o un número que puede expresarse como la suma de un número entero y un número racional menor que uno. Por ejemplo,

$$\frac{28}{3}=\frac{27}{3}+\frac{1}{3}=9+\frac{1}{3},$$

$$\frac{108}{15}=\frac{105}{15}+\frac{3}{15}=7+\frac{3}{15},$$

y

$$\frac{13}{7}=\frac{7}{7}+\frac{6}{7}=1+\frac{6}{7}$$

son todos ejemplos de números racionales simbolizados por dichas sumas; mientras que

$$\frac{24}{3}=8, \qquad \frac{19}{19}=1, \qquad \text{y} \qquad \frac{24}{6}=4$$

son ejemplos de fracciones que representan números enteros. Desde luego, así como hay un número infinito de fracciones que simbolizan a un número racional dado, mayor que uno, también hay un número infinito de formas para expresar las sumas que estamos discutiendo. Por ejemplo $4+\frac{1}{3}$ también puede escribirse como $4+\frac{2}{6}$, $4+\frac{3}{9}$ y así sucesivamente.

Un número racional mayor que 2, como $\frac{10}{3}$, puede interpretarse de muchas maneras como la suma de un número entero y un número racional. Por ejemplo $\frac{10}{3}$: no sólo podemos escribirlo $3+\frac{1}{3}$, $3+\frac{2}{6}$, o cualquier otra forma de esta expresión, también podemos escribirla $2+\frac{4}{3}$ ó $1+\frac{7}{3}$ o cualquier otra variante de estas expresiones. En cualquier problema de aplicación práctica, las sumas de este tipo generalmente se abrevian escribiendo únicamente los sumandos uno junto al otro y omitiendo el signo de operación. Entonces, $3+\frac{1}{3}$ se acostumbra escribirlo como $3\frac{1}{3}$, $2+\frac{4}{3}$ se puede expresar como $2\frac{4}{3}$ y $1+\frac{7}{3}$ como $1\frac{7}{3}$. A los símbolos tales como $3\frac{1}{3}$, $2\frac{4}{3}$ y $1\frac{7}{3}$ se les llama *numerales mixtos* y son expresiones de números racionales mayores que uno.

Un problema común que confrontamos al operar con números racionales mayores que uno consiste en tratar de obtener una fracción equivalente (o sea, expresar al mismo número racional que) un numeral mixto dado, o a la inversa, obtener un numeral mixto equivalente a una fracción dada, que simbolice a un número racional mayor que uno. Considere el número racional simbolizado por el numeral mixto $4\frac{1}{6}$. Por definición esta es una notación abreviada del numeral $4+\frac{1}{6}$. Puesto que otra expresión de cuatro es $\frac{24}{6}$, podemos escribir

$$4+\frac{1}{6}=\frac{24}{6}+\frac{1}{6}$$
$$=\frac{25}{6};$$

y por tanto $\frac{25}{6}$ expresa el mismo número que $4\,\frac{1}{6}$. A la inversa $\frac{25}{6}$ puede escribirse como la suma de $\frac{24}{6}+\frac{1}{6}$; y podemos invertir los pasos anteriores para obtener $4\,\frac{1}{6}$. Sin embargo, si deseamos podemos escribir

$$\frac{25}{6} \quad \text{como} \quad \frac{18}{6}+\frac{7}{6} \quad \text{ó} \quad \frac{12}{6}+\frac{13}{6} \quad \text{o también} \quad \frac{6}{6}+\frac{19}{6},$$

y obteniendo los numerales mixtos correspondientes tenemos

$$3\,\frac{7}{6}, \quad 2\,\frac{13}{6}, \quad \text{y} \quad 1\,\frac{19}{6},$$

respectivamente, todos son equivalentes a $4\frac{1}{6}$. En la práctica, la expresión más simple para un numeral mixto es aquella en la que el numeral se compone de la expresión del número entero más grande posible como una parte y una fracción que en su forma más simple (menor que la unidad, desde luego) como la otra parte. Por tanto, $4\,\frac{1}{6}$ es la expresión más simple para el número racional que simboliza; otras expresiones son $3\,\frac{7}{6}$, $2\,\frac{13}{6}$, $1\,\frac{19}{6}$, ó $4\,\frac{2}{12}$.

No obstante, en los algoritmos de la adición y de la sustracción que se emplean con numerales mixtos es frecuente encontrar otras expresiones diferentes de la expresión más simple, y en algunos casos es preferible emplearlas. Por ejemplo, tratar de obtener otra expresión del número $8\frac{1}{3}-5\frac{2}{3}$, el numeral $8\frac{1}{3}$ puede reemplazarse por el numeral mixto equivalente $7\,\frac{4}{3}$, de aquí tenemos

$$7\frac{4}{3}-5\frac{2}{3} \text{ es igual a } 2\,\frac{2}{3}.$$

Por selección podemos saber cuál es el numeral mixto que deba emplearse en un problema determinado, y esta selección en general se basa en la conveniencia. Esto es, debe emplearse el numeral más adecuado para el problema. Es conveniente evitar el empleo de numerales mixtos, excepto en casos raros; por ejemplo, cuando estamos trabajando con expresiones en las que intervienen productos y cocientes, ya que para estas expresiones las fracciones facilitan mejores y más simples medios de trabajar con ellas.

En general, es preferible emplear los numerales mixtos como símbolos de números racionales cuando empleamos estos números para expresar magnitudes físicas, como en $23\,\frac{7}{16}$ centímetros, $4\frac{1}{2}$ kilos, $3\,\frac{1}{4}$ horas, y otras semejantes.

Grupo de ejercicios 3

1. Escriba tres fracciones más, o pares ordenados, en cada una de las siguientes clases de equivalencia.

   a) $\{(2, 3),\ (4, 6),$ _____, _____, _____, $\dots\}$

   b) $\{(3, 5),\ (6, 10),$ _____, _____, _____, $\dots\}$

   c) $\left\{ \frac{5}{6},\ \frac{10}{12},\right.$ _____, _____, _____, $\left.\dots\right\}$

   d) $\left\{ \frac{4}{3},\ \frac{8}{6},\right.$ _____, _____, _____, $\left.\dots\right\}$

2. Empleando tres formas diferentes exprese cada uno de los siguientes números como la suma de un número entero y un número racional.

   a) $4\frac{1}{3}$ como _____, _____, _____.

   b) $6\times\frac{2}{6}$ como _____, _____, _____

   c) $\frac{22}{3}$ como _____, _____, _____

3. Obtenga el numeral mixto más simple, que exprese a cada uno de los números racionales representados por

   a) $\frac{11}{3}, \frac{22}{6}$, y $2\frac{5}{3}$

   b) $\frac{22}{5}, 3\frac{7}{5}$, y $2\frac{12}{5}$

   c) $\frac{20}{7}, \frac{40}{14}$, y $1\,\frac{13}{7}$

Fracciones básicas decimales

Una fracción que tenga por denominador a una potencia de 10, como por ejemplo $\frac{1}{10^0}$, $\frac{1}{10^1}$, ó $\frac{1}{10^2}$, puede llamarse, por brevedad *fracción básica.* Se recordará que $10^0=1$. Algunos ejemplos de fracciones básicas son.

$$\frac{15}{1},\ \frac{3}{10},\ \frac{71}{100},\ \frac{3}{1000},\qquad \text{y}\qquad \frac{173\,512}{10\,000}$$

El sistema de numeración de base diez, que se desarrolló para simbolizar a los números enteros (ver cuaderno 3: *Sistemas de numeración para los números enteros*) puede extenderse para establecer símbolos adecuados para los números racionales expresados por las fracciones básicas. (Realmente, este sistema puede extenderse más, de tal manera que se encuentren símbolos convenientes para *todos* los números racionales, pero fijémonos primero sólo en aquellos representados por las fracciones básicas.)

Recuerde que "437" es un símbolo abreviado que expresa la suma de $400+30+7$, en la que cada uno de los sumandos es el producto de un número del conjunto de los dígitos

$$\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$$

y una potencia de diez. Por lo que $400+30+7$ puede escribirse como

$$(4\times 100)+(3\times 10)+(7\times 1),\quad \text{ó}\quad (4\times 10^2)+(3\times 10^1)+(7\times 10^0).$$

Las potencias de 10 que se emplean en esta notación se llaman *valores posicionales* de las posiciones ocupadas por los dígitos 4, 3 y 7. Parece natural, por esto, extender esta notación para incluir sumas como las siguientes

$$\frac{4}{10}+\frac{3}{100}+\frac{7}{1\,000},$$

en donde cada sumando es el producto de un número del conjunto de los dígitos

$$\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$$

y el *recíproco* de una potencia de diez. Entonces, podemos escribir la suma

$$\frac{4}{10}+\frac{3}{100}+\frac{7}{1000},\qquad \text{como a}\qquad \left(4\times\frac{1}{10^1}\right)+\left(3\times\frac{1}{10^2}\right)+\left(7\times\frac{1}{10^3}\right).$$

Si además estamos de acuerdo en que puede abreviarse esta suma mediante el símbolo "437", tendríamos exactamente una contraparte de la notación que desarrollamos para los números enteros, asignando, esta vez, valores posicionales $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, y $\frac{1}{1\,000}$ a las posiciones ocupadas por "4", "3" y "7" respectivamente. Desde luego que no podemos emplear el numeral "437' para expresar tanto a

$$(4\times 10^2)+(3\times 10^1)+(7\times 10^0) \text{ y } \left(4\times\frac{1}{10^1}\right)+\left(3\times\frac{1}{10^2}\right)+\left(7\times\frac{1}{10^3}\right).$$

sin crear confusión.* Por lo que, para indicar si deseamos expresar los valores posicionales como potencias de diez o como recíprocos de las potencias de diez, empleamos un punto (llamado *punto decimal*) para separarlos. Todas las posiciones ocupadas por dígitos que se encuentren a la derecha del punto tienen como valor posicional el recíproco de las potencias de diez. Entonces, "437" significará

$$(4\times 10^2)+(3\times 10^1)+(7\times 10^0),$$

mientras que 0.437 significará

$$\left(4\times\frac{1}{10^1}\right)+\left(3\times\frac{1}{10^2}\right)+\left(7\times\frac{1}{10^3}\right).$$

Por otro lado, los numerales mixtos en que la expresión de racional son fracciones básicas pueden expresarse en forma ventajosa por esas potencias. Por ejemplo: $17\frac{9}{10}$ puede escribirse como $17+\frac{9}{10}$. Y esto puede escribirse 17.9, porque según hemos acordado $\frac{9}{10}$ puede expresarse como 0.9; y además nuestro sistema tiene como parte de su estructura una suposición en lo que respecta a la adición de múltiplos consecutivos de las potencias de diez. (Observe que hemos escrito 0.9 en vez de .9 para asegurarnos de que el punto decimal no pasará inadvertido.) Entonces:

$$17.9=(1\times 10^1)+(7\times 10^0)+\left(9\times\frac{1}{10^1}\right).$$

Desde luego que no todas las fracciones básicas tienen como numeradores únicamente a los elementos del conjunto

* Vale la pena observar que esto es exactamente lo que hacían los antiguos babilonios en el sistema de numeración que empleaban, aunque usaban el 60 como base. Entonces, el símbolo babilonio V se empleó como 60, 1, ó $\frac{1}{60}$, así como otras potencias de 60, y el que examine sus escritos, tiene que interpretar la intención valiéndose del contexto. Ignoramos hasta qué grado confundían esto los babilonios.

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Considere la siguiente fracción básica $\frac{27}{100}$ Las consideraciones que hemos hecho con respecto a la notación desarrollada, como en

$$\left(4\times\frac{1}{10^1}\right)+\left(3\times\frac{1}{10^2}\right)+\left(7\times\frac{1}{10^3}\right)$$

o su equivalente,

$$\left(4\times\frac{1}{10}\right)+\left(3\times\frac{1}{100}\right)+\left(7\times\frac{1}{1000}\right)$$

se han tomado sólo según el caso en el que en cada producto uno de los factores se exprese mediante numerales de un dígito (el otro factor es una potencia de diez, o sea el valor posicional de la posición). Esto significa que no podemos escribir directamente $\left(27\times\frac{1}{100}\right)$ porque "27" contiene dos dígitos. Sin embargo, es claro que podemos escribir $\frac{27}{100}$ como $\frac{20}{100}+\frac{7}{100}$ y que $\frac{20}{100}$ es equivalente a $\frac{2}{10}$ (que es otro símbolo para el mismo número racional), así que $\frac{27}{100}$ es equivalente a $\frac{2}{10}+\frac{7}{100}$. Entonces, por definición

$$\frac{27}{100}=\frac{2}{10}+\frac{7}{100}=0.27.$$

Como siguiente ejemplo considérese la fracción $\frac{37}{1\,000}$, que es equivalente $\frac{30}{1\,000}+\frac{7}{1\,000}$, o sea $\frac{3}{100}+\frac{7}{1\,000}$. Esta expresión puede escribirse así:

$$\left(0\times\frac{1}{10}\right)+\left(3\times\frac{1}{100}\right)+\left(7\times\frac{1}{1000}\right).$$

Observe que no hay un sumando que sea múltiplo de $\frac{1}{10}$ en la expresión $\left(3\times\frac{1}{100}\right)+\left(7\times\frac{1}{1\,000}\right)$, pero ya que por las propiedades de nuestro sistema de numeración debemos incluir un numeral cuyo valor posicional sea $\frac{1}{10}$, incluimos a $0\times\frac{1}{10}$ como sumando. Entonces

$$\left(0\times\frac{1}{10}\right)+\left(3\times\frac{1}{100}\right)+\left(7\times\frac{1}{1000}\right)$$

es equivalente a 0.037. De manera similar puede demostrarse que la fracción $\frac{327}{1\,000}$ es equivalente al numeral decimal 0.327, $\frac{432}{10\,000}$ a 0.0432 y $27\,\frac{389}{1\,000}$ a 27.389.

Veamos nuevamente los ejercicios del párrafo anterior y observemos, por ejemplo, que:

En la fracción $\frac{27}{100}$ hay dos ceros en el numeral del denominador y que en el numeral decimal 0.27 hay dos dígitos a la derecha del punto decimal.

En la fracción $\frac{432}{10\,000}$ hay cuatro ceros en el numeral del denominador y que en el numeral decimal 0.0432 hay cuatro dígitos a la derecha del punto decimal.

En todo caso, el número de ceros que tiene el numeral del denominador de la fracción básica es el mismo que el número de dígitos que hay a la derecha del punto decimal, en el numeral decimal.

Las fracciones básicas que representan números mayores que uno, pero que no son enteros, son equivalentes a numerales decimales que tienen parte entera y parte fraccionaria. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}\frac{2357}{100} &= \frac{2300}{100} + \frac{57}{100}\\ &= 23 + \frac{57}{100}\\ &= 23.57.\end{aligned}$$

A la inversa, para un numeral decimal finito dado, también es posible encontrar una fracción básica equivalente. Por "finito" se entiende que el numeral decimal tiene un dígito, diferente de cero, que pone término al numeral. Por ejemplo, el numeral decimal 0.333 . . ., no es un numeral finito ya que vemos que el dígito 3 se repite periódicamente sin fin. Si un numeral decimal es finito puede obtenerse directamente su correspondiente fracción básica.

$$0.237 = \frac{237}{1\,000},\ 0.0812 = \frac{812}{10\,000},\ \text{y}\ 3.79 = \frac{379}{100}.$$

Se justifica el hecho de expresar 0.237 como $\frac{327}{1\,000}$, porque al escribir 0.237 en la forma desarrollada, tenemos

$$\left(2\times\frac{1}{10}\right)+\left(3\times\frac{1}{100}\right)+\left(7\times\frac{1}{1000}\right),$$

que es equivalente a

$$\frac{2}{10}+\frac{3}{100}+\frac{7}{1000}.$$

Empleando el procedimiento usual para expresar sumas como estas, las primeras dos fracciones pueden reemplazarse con fracciones equivalentes cuyo denominador sea 1 000, por lo que tenemos

$$\frac{200}{1000}+\frac{30}{1000}+\frac{7}{1000},$$

de lo que obtenemos

$$\frac{200+30+7}{1\,000}, \text{ ó } \frac{237}{1\,000}$$

En general no emplearemos este proceso, pero en realidad cualquier numeral decimal finito que represente a un número racional menor que uno puede escribirse directamente como una fracción básica. Para esto empleamos la siguiente regla: la fracción tendrá como numerador al número entero simbolizado por los dígitos del numeral decimal (por ejemplo, 237 para el numeral 0.0237, 54 para el numeral 0.0054, o 3 para 0.3) y tendrá como denominador a la potencia de diez que corresponda al valor posicional de la posición que ocupe el último dígito del numeral decimal (por ejemplo, 10 000 para el numeral 0.0237, 10 000 para 0.0054 y 10 para 0.3). Entonces,

0.72 es equivalente a $\frac{72}{10^2}$, ó $\frac{72}{100}$;

0.0302 es equivalente a $\frac{302}{10^4}$, o sea $\frac{302}{10\,000}$;

y 0.00004 es equivalente a $\frac{4}{10^5}$, o sea $\frac{4}{100\,000}$.

La equivalencia entre las fracciones básicas $\left(\text{tales como } \frac{16}{100}\right)$ y los numerales decimales (tales como 0.16) nos proporcionan una guía para leer numerales decimales que corresponden a números racionales menores que uno. Las palabras "décimos", "centésimos", "milésimos", etc., se asignan a los valores posicionales correspondientes y para leer numerales decimales, sólo necesitamos ver cuál es su último dígito, que en general es diferente de cero, aunque puede ser cero. Entonces se lee a 0.023 como "veintitrés milésimos"; porque el último dígito tiene como valor posicional $\frac{1}{1\,000}$

Algunas veces, por una razón o por otra, los numerales decimales se escriben terminados en uno o más ceros, en estos casos los ceros deben incluirse al leer el numeral. En el ejemplo anterior puede escribirse el numeral 0.0230 en lugar de 0.023, y en este caso se lee "doscientos treinta diezmilésimos" en lugar de "veintitrés milésimos" aunque es evidente que ambos numerales representan el mismo número racional. La figura 5 muestra el nombre que le corresponde a los valores posicionales de varias posiciones que están a la derecha del punto decimal, en un numeral decimal.

.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
punto decimal	décimos	centésimos	milésimos	diezmilésimos	cienmilésimos	millonésimos	diezmillonésimos	cienmillonésimos	milmillonésimos *

FIGURA 5

En general, se prefiere emplear numerales decimales como símbolos de números racionales en trabajos científicos, o en los casos que sea necesario, o que se especifique.

Fracciones equivalentes a las fracciones básicas

Existe otra clase de fracciones que, aunque a primera vista no parecen fracciones básicas, son equivalentes a dichas fracciones, esto es, fracciones que tengan como denominador una potencia de 10. Existen fracciones cuyos denominadores contienen como factores sólo dos números, que son 2 y 5. Algunos ejemplos son

$$\frac{1}{2},\quad \frac{3}{5},\quad \frac{7}{20},\quad \frac{11}{40},\quad \frac{1}{50},\quad \frac{113}{80},\quad \text{y}\quad \frac{211}{160}.$$

Además,

$$\frac{7}{20} \text{ es equivalente a } \frac{7}{2\times 2\times 5}, \text{ o sea } \frac{7}{2^2\times 5};$$

* Recuérdese que en los Estados Unidos y Francia a la cantidad 1 000 000 000 (mil millones) la llaman billón, mientras que nosotros la llamamos millar de millón o simplemente mil millones, y en consecuencia, milmillonésimos y no billonésimos; es la 9ª posición a la derecha del punto decimal. [N. del T.]

$\frac{11}{40}$ es equivalente a $\frac{11}{2\times2\times2\times5}$, o sea $\frac{11}{2^3\times5}$;

$\frac{1}{50}$ es equivalente a $\frac{1}{2\times5\times5}$, o sea $\frac{1}{2\times5^2}$;

$\frac{13}{80}$ es equivalente a $\frac{13}{2\times2\times2\times2\times5}$, o sea $\frac{13}{2^4\times5}$;

y $\frac{211}{160}$ es equivalente a $\frac{211}{2\times2\times2\times2\times2\times5}$, o sea $\frac{211}{2^5\times5}$.

Siempre podemos obtener fracciones básicas equivalentes a tales fracciones, con sólo multiplicar el numerador y el denominador de la fracción por un factor adecuado, ya sea 2 ó 5, tomado el número adecuado de veces para que el denominador sea una potencia de diez.

Para esto, recordemos que si se multiplica por un mismo número natural tanto el numerador como el denominador de una fracción dada, el resultado será una fracción equivalente a la fracción dada. Por ejemplo:

$$\frac{3}{5}=\frac{3\times5}{5\times5}=\frac{15}{25},\quad \frac{1}{2}=\frac{1\times2}{2\times2}=\frac{2}{4},\quad y\quad \frac{5}{8}=\frac{5\times2}{8\times2}=\frac{10}{16}.$$

Ahora sí, ya podemos obtener una fracción básica equivalente a $\frac{1}{2}$, basta con multiplicar tanto al numerador como al denominador, por 5 para obtener la fracción equivalente $\frac{5}{10}$. Si deseamos obtener una fracción básica equivalente a $\frac{11}{40}$, procedamos

$$\frac{11}{40}=\frac{11}{2\times2\times2\times5}=\frac{11}{2^3\times5},$$

y observemos cómo en el denominador 2 se halla tres veces como factor, en cambio 5 aparece como factor únicamente una vez. Por tanto, multiplicando el numerador y el denominador de $\frac{11}{2^3\times5}$ por 5^2, ó 25, obtenemos $\frac{11\times25}{2^3\times5\times25}$, o sea $\frac{275}{1\,000}$ que es una fracción básica. Hemos, por decirlo así, "introducido" dos factores 5 en el denominador de $\frac{11}{2^3\times5}$ para obtener el denominador $2^3\times5^3$, que es 10^3 ó 1 000. Realmente debemos observar que si el número es una potencia de 10, debe contener a 2 como factor el mismo número de veces que a 5 también como factor. Para obtener la fracción básica equivalente a $\frac{1}{50}$, por ejemplo, observamos que

$$\frac{1}{50}=\frac{1}{2\times 5^2};$$

por lo que es necesario en este caso introducir a 2 como factor adicional, ya que el resultado del denominador será $2^2\times 5^2$, ó 100. Por tanto, multiplicamos por 2 el numerador y el denominador de $\frac{1}{50}$, para obtener $\frac{1\times 2}{50\times 2}$, o sea $\frac{2}{100}$ que es una fracción básica.

Obtengamos, como último ejemplo de este proceso, una fracción básica equivalente a $\frac{13}{80}$. El denominador puede escribirse en forma factorizada como $2^4\times 5$ y como se ve, es necesario que 5 esté tres veces como factor para que se tenga una potencia de diez. Entonces, multiplicamos al numerador y al denominador de $\frac{13}{80}$ por 5^3 y obtenemos

$$\frac{13\times 5^3}{80\times 5^3}=\frac{13\times 125}{80\times 125},$$

que es equivalente a $\frac{1\,625}{10\,000}$.

Puesto que las fracciones cuyos denominadores son productos de las potencias de 2 y de 5 son equivalentes a las fracciones básicas, entonces pueden expresarse como numerales decimales. Por ejemplo, vemos que $\frac{1}{2}$ es equivalente a $\frac{5}{10}$, así que podemos escribir

$$\frac{1}{2}=\frac{5}{10}=0.5;$$

de igual modo

$$\frac{11}{40}=\frac{275}{1000}=0.275,$$

$$\frac{1}{50}=\frac{2}{100}=0.02,$$

y

$$\frac{13}{80}=\frac{1625}{10{,}000}=0.1625.$$

A la inversa, todo numeral decimal finito es equivalente a una fracción cuyo denominador contiene como factores potencias de 2 y de 5 solamente; y tal fracción puede obtenerse de cada numeral, escribiendo, de esta forma, el numeral como fracción básica. Por ejemplo:

$$0.176=\frac{176}{1000}=\frac{176}{2^3\times5^3}=\frac{2^4\times11}{2^3\times5^3}=\frac{2\times11}{5^3}=\frac{22}{125}$$

y

$$0.25=\frac{25}{100}=\frac{25}{2^2\times5^2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}.$$

Grupo de ejercicios 4

1. Empleando exponentes, exprese con notación desarrollada cada uno de los siguientes números.

   Ejemplos: $0.327=\left(3\times\frac{1}{10^1}\right)+\left(2\times\frac{1}{10^2}\right)+\left(7\times\frac{1}{10^3}\right)$

   a) 21.47   *c*) 80.1089

   b) 165.036   *d*) 0.807

2. Obtenga la fracción básica que corresponda a cada uno de los siguientes numerales decimales finitos.

   a) 0.417   *c*) 0.06   *e*) 14.12

   b) 3.208   *d*) 8.005   *f*) 10.075

3. Obtenga los numerales decimales correspondientes a los números representados por cada una de las siguientes fracciones básicas.

   a) $\frac{169}{10^3}$ *c*) $\frac{24}{10^3}$ *e*) $\frac{105}{10^1}$

   b) $\frac{205}{10^4}$ *d*) $\frac{7}{10^2}$ *f*) $\frac{19}{10^5}$

4. Exprese a los siguientes números como producto de factores primos.

   a) 40   *c*) 160   *e*) 20

   b) 80   *d*) 800   *f*) 50

5. Exprese los siguientes números como fracciones básicas si es posible, y después como numerales decimales.

Ejemplo:

$$\begin{aligned}\frac{7}{40} &= \frac{7}{2\times2\times2\times5}\\ &= \frac{7}{2^3\times5}\\ &= \frac{7}{2^3\times5}\times\frac{5^2}{5^2}\\ &= \frac{7\times5^2}{2^3\times5^3}\\ &= \frac{175}{1000}\\ &= 0.175\end{aligned}$$

a) $\frac{3}{50}$ *c*) $\frac{9}{40}$ *e*) $\frac{13}{20}$

b) $\frac{13}{80}$ *d*) $\frac{11}{25}$ *f*) $\frac{7}{120}$

Numerales decimales y el algoritmo de la división

El algoritmo de la división que empleamos para obtener cocientes de números enteros (ver cuaderno 4: *Algoritmos de las operaciones con números enteros*) puede emplearse también para obtener numerales decimales que expresen números racionales equivalentes a fracciones básicas, esto es, fracciones cuyo denominador sea una potencia de 10. Para darnos cuenta de la forma como puede hacerse, recordemos que todo número racional puede considerarse como el cociente de dos números enteros, o sea la fracción $\frac{a}{b}$ expresa el cociente que se obtiene cuando el número entero a se divide entre el número entero, diferente de cero, b. El algoritmo de la división se emplea para obtener otro símbolo de tales cocientes. Por ejemplo, otra expresión de $\frac{85}{5}$ puede obtenerse de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r}17\\ 5\;\overline{)\;85}\\ \underline{5}\\ 35\\ \underline{35}\\ 0\end{array}$$

donde "17' es el símbolo deseado. Si aplicamos nuevamente el mismo proceso a $\frac{87}{5}$ obtenemos

$$\begin{array}{r} 17 \\ 5\ \overline{)\ 87} \\ \underline{5} \\ 37 \\ \underline{35} \\ 2 \end{array}$$

donde tenemos como residuo 2 y por tanto

$$\frac{87}{5}=17\frac{2}{5}.$$

Recuerde que $\frac{87}{5}=\frac{85}{5}+\frac{2}{5}=17+\frac{2}{5}$.

En numeración decimal expresamos $17\,\frac{2}{5}$ como 17.4.

Consideremos ahora el problema de obtener el numeral decimal que corresponde a una fracción, por ejemplo, a $\frac{3}{8}$. Esta vez al emplear el algoritmo de $8\overline{)\,3}$ nos damos cuenta de que no podemos obtener ninguna información útil al tratar de seguir el procedimiento. Esto es, tenemos que

$$\begin{array}{r} 0 \\ 8\ \overline{)\ 3} \\ \underline{0} \\ 3 \end{array}$$

y el algoritmo no nos dice nada puesto que $0+\frac{3}{8}$, es $\frac{3}{8}$, o sea la fracción original. Sin embargo, es muy conveniente observar que, para el número racional $\frac{3\,000}{8}$, que es exactamente 1 000 veces $\frac{3}{8}$, al aplicar el algoritmo tenemos

$$\begin{array}{r} 375 \\ 8\ \overline{)\ 3000} \\ \underline{24} \\ 60 \\ \underline{56} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 0 \end{array}$$

Esto es, $\frac{3\,000}{8}=375$. Pero sabemos que $\frac{3\,000}{8}$ es 1 000 veces el número racional $\frac{3}{8}$, así que 375 es 1 000 veces el resultado de $\frac{3}{8}$. Entonces, si *dividimos* 375 entre 1 000, el resultado debe ser $\frac{3}{8}$, esto es

$$\frac{375}{1\,000}=\frac{3}{8}.$$

Podemos comprobar este resultado observando que $375\times8=3\times1\,000$. Pero $\frac{375}{1\,000}$ puede expresarse como numeral decimal 0.375. Entonces, hemos empleado el algoritmo para obtener el resultado $\frac{3}{8}=0.375$, considerando

$$\frac{3000}{8}=375.$$

Nota. Empleando fracciones,
$$\begin{aligned}\frac{3}{8}&=\frac{3}{8}\times1\\&=\frac{3}{8}\times\left(\frac{1000}{1}\times\frac{1}{1000}\right)\\&=\left(\frac{3}{8}\times\frac{1000}{1}\right)\times\frac{1}{1000}\\&=\frac{3000}{8}\times\frac{1}{1000}\\&=\frac{375}{1}\times\frac{1}{1000}.\end{aligned}$$

Puede seguirse este procedimiento si notamos que

$$8\,\overset{375}{\overline{)\,3\,000}}$$

es un enunciado que indica que

$$\frac{3\,000}{8}=375,$$

y si dividimos ambos miembros entre 1 000 obtenemos

$$\frac{3.000}{8}=0.375,$$

al emplear el algoritmo correspondiente tenemos que

$$8\,\overset{0.375}{\overline{)3.000}}$$

Analizando el algoritmo desde el principio, podemos observar con detalle el procedimiento, para esto comenzamos por

$$8\ \overline{)\ 3.000,}$$

y continuando el procedimiento

$$\begin{array}{r} 0.375 \\ 8)\,\overline{3.000,} \\ \underline{24} \\ 60 \\ \underline{56} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 0 \end{array}$$

en donde el algoritmo se aplica a $\frac{3\,000}{8}$, pero al tomarse en cuenta el punto decimal de 3.000, y al incluirse un punto decimal en 0.375, el proceso pudo aplicarse a $8\ \overline{)\ 3}$

De igual modo, para obtener el numeral decimal equivalente a $\frac{13}{80}$ podemos emplear el algoritmo para encontrar $\frac{130\,000}{80}$ y dividir el resultado entre 10 000, o también, proceder directamente.

$$\begin{array}{r} 0.1625 \\ 80\ )\,\overline{13.0000} \\ \underline{8\,0} \\ 5\,00 \\ \underline{4\,80} \\ 200 \\ \underline{160} \\ 400 \\ \underline{400} \end{array}$$

Observemos que en este ejemplo, en lugar de considerar 1 000 veces el número racional $\frac{13}{80}$, lo consideramos 10 000 veces, esto es $\frac{130\,000}{80}$. ¿Cómo podemos saber, en cada caso, cuál es la potencia de diez que debemos emplear como factor? La respuesta la encontramos al aplicar el algoritmo como se aplicó anteriormente y éste nos lo indicará; sólo necesitamos continuar su aplicación hasta obtener cero como residuo (desde luego, en caso de división exacta).

Por ejemplo, considérese el problema de obtener un número decimal equivalente a $\frac{19}{40}$. Podemos principiar el algoritmo como sigue:

$$40\ \overline{)\ 19.0}$$

y continuamos de la siguiente manera

$$\begin{array}{r} 0.4 \\ 40\ \overline{)\ 19.0} \\ \underline{16\ 0} \\ 3\ 0 \end{array}$$

Puesto que el residuo es diferente de cero, en lugar de 19.0 emplearemos 19.00, otra expresión para el mismo número, repitamos el proceso:

$$\begin{array}{r} 0.47 \\ 40\ \overline{)\ 19.00} \\ \underline{16\ 0} \\ 3\ 00 \\ \underline{2\ 80} \\ 20 \end{array}$$

Como el residuo no es cero aún, reemplazaremos a 19.00 por su equivalente 19.000; tenemos

$$\begin{array}{r} 0.475 \\ 40\ \overline{)\ 19.000} \\ \underline{16\ 0} \\ 3\ 00 \\ \underline{2\ 80} \\ 200 \\ \underline{200} \\ 0 \end{array}$$

Concluimos que $\frac{19}{40} = 0.475$. Desde luego en este caso se aplicó el algoritmo de los números enteros al número racional $\frac{19}{40}$ multiplicado por 1 000, esto es, $\frac{19\ 000}{40}$; sólo que se conservó el punto decimal en 19.000 y se incluyó un punto decimal precediendo a los dígitos en el numeral cociente. Además, no es necesario reemplazar 19.0 por 19.00 y luego por 19.000, como se hizo; basta con agregar ceros a la derecha de 19.0.

También puede adaptarse este procedimiento a cocientes tales como $\frac{19}{0.04}$, en los que el denominador no es un número entero, sino un número decimal. En tal caso, procedemos como sigue

$$\frac{19}{0.04} = \frac{1\ 900}{4}$$

y continuamos el proceso en la forma acostumbrada.

Pero este proceso no es la única forma que puede justificar la utilidad de la aplicación del algoritmo para este propósito. En realidad, puede demostrarse la validez del algoritmo recurriendo directamente a las propiedades del sistema de numeración decimal y a las propiedades de los números racionales. Señalemos que el algoritmo puede emplearse para obtener numerales decimales que expresen cocientes cuando se aplica a pares de enteros adecuados —adecuados en cuanto a que existan numerales decimales finitos que expresen a esos cocientes. Hemos visto que esto ocurre siempre que el divisor contenga únicamente potencias de 2 y 5 como factores.

Aproximación de números racionales

Hasta ahora hemos analizado la determinación de numerales decimales correspondientes a números racionales representados ya sea por fracciones básicas $\left(\text{tales como } \frac{3}{100}\right)$ o por fracciones $\left(\text{como } \frac{3}{5}\right)$ equivalentes a fracciones básicas. Pero si la más simple expresión fraccionaria de un número racional cuyo denominador contiene como factor cualquier número natural diferente de 2 y 5, entonces no es fracción básica equivalente.

Por ejemplo, considere la fracción $\frac{1}{6}$, en la cual el denominador tiene por factores 2 y 3. Suponga que hubiera una fracción básica equivalente a $\frac{1}{6}$; es decir, que hubiera una fracción $\frac{a}{10^n}$, en donde a es un número entero y n un número natural, de modo que

$$\frac{1}{6} = \frac{a}{10^n}.$$

Sabemos que lo anterior es cierto si, y sólo si,

$$1 \times 10^n = 6 \times a$$

Mas el número indicado en el miembro izquierdo de esta ecuación tiene como factores primos sólo o 2 y a 5, en tanto que el segundo miembro tiene a 3 como factor (a puede ser cualquier número entero), porque un factor de 6 es 3; por tanto, no es posible que el miembro izquierdo y el derecho de esta ecuación sean iguales, y entonces no podemos obtener una fracción básica, equivalente a $\frac{1}{6}$. Podemos apoyarnos en un argumento semejante a éste para demostrar que las fracciones en su forma más simple, encuentran fracciones básicas equivalentes *sólo si* sus denominadores tienen exclusivamente potencias de 2 y 5 como factores (para una discusión más completa de los factores de los números enteros, ver el cuaderno 5: *Números y sus factores*).

Por tanto, es cierto que no siempre podemos obtener un numeral decimal finito equivalente a una fracción dada, porque no siempre existen tales numerales. Sin embargo, es posible obtener decimales numerales finitos "aproximados" de números racionales tales como $\frac{1}{6}$ tan próximo a lo que se quiera. Por "aproximados" entendemos que sus numerales expresen números racionales que difieran del número racional $\frac{1}{6}$ (en este caso) en una cantidad tan pequeña cuanto se desee.

Analicemos un procedimiento mediante el cual podemos hacer tales aproximaciones, empleando otra vez el algoritmo de la división de los números enteros. Suponga que deseamos obtener una aproximación del orden de $\frac{1}{6}$, más o menos, a $\frac{1}{1\,000}$; esto es, queremos obtener la expresión de un número racional que difiera de $\frac{1}{6}$ en menos de $\frac{1}{1\,000}$. Si antes consideramos el problema de obtener un numeral mixto de 1 000 veces $\frac{1}{6}$, o sea $\frac{1\,000}{6}$, tenemos

$$
\begin{array}{r}
166 \\
6\,\overline{)\,1000} \\
\underline{6} \\
40 \\
\underline{36} \\
40 \\
\underline{36} \\
4
\end{array}
$$

lo que significa que

$$\frac{1\,000}{6} = 166\,\frac{4}{6} = 166\,\frac{2}{3}.$$

Ahora, para relacionar lo anterior con $\frac{1}{6}$, debemos dividir $166\frac{2}{3}$ entre 1 000. Por definición,

$$166\,\frac{2}{3} = 166 + \frac{2}{3},$$

y tenemos

$$\frac{166+\frac{2}{3}}{1000}=\frac{166}{1000}+\frac{\frac{2}{3}}{1000}$$
$$=0.166+\frac{2}{3000}$$
$$=0.166+\frac{1}{1500}.$$

Puesto que $\frac{1}{1\,500}$ es menor que $\frac{1}{1\,000}$, podemos estar seguros de que 0.166 no difiere de $\frac{1}{6}$ en más de $\frac{1}{1\,000}$, como se quería, y entonces 0.166 es una aproximación aceptable respecto de $\frac{1}{6}$.

Como segundo ejemplo considere el problema de obtener una aproximación en numeración decimal en relación a $\frac{3}{14}$, que difiera en menos de $\frac{1}{10\,000}$. Sigamos ahora el algoritmo abreviado, conservando el punto decimal en el dividendo que llevaremos al cociente; entonces

$$\begin{array}{r@{\,}l}
 & \;0.2142 \\
14 & \overline{)\;3.0000} \\
 & \;\underline{2\,8} \\
 & \;20 \\
 & \;\underline{14} \\
 & \;60 \\
 & \;\underline{56} \\
 & \;40 \\
 & \;\underline{28} \\
 & \;12
\end{array}$$

¿Es 0.2142 un número racional que difiere de $\frac{3}{14}$ en menos de $\frac{1}{10\,000}$? El residuo de la división anterior fue 12. Aparecerán los mismos dígitos en el residuo, si multiplicamos por 10 000, para obtener $\frac{30\,000}{14}$, y después de aplicar el algoritmo obtenemos $2\,142\frac{12}{14}$. Por tanto, al dividir entre 10 000, tenemos $\frac{2\,142}{10\,000}+\frac{12}{140\,000}$. Así que 0.2142 difiere de $\frac{3}{41}$ en $\frac{12}{140\,000}$. Pero $\frac{12}{140\,000}=\frac{6}{70\,000}$, que es menos que $\frac{1}{10\,000}$, y por ende 0.2142 es aceptable como una aproximación.

En la práctica, si la exactitud requerida se especifica en $\frac{1}{10^n}$ unidades, suspenderemos el algoritmo si encontramos el n^{simo} dígito a la derecha del punto decimal; entonces el numeral decimal obtenido así, será una aproximación satisfactoria.

Grupo de ejercicios 5

1. ¿Cuáles de las siguientes fracciones no tiene numeral decimal finito equivalente? Para resolver esta pregunta examine únicamente el denominador, e indique por qué, basta con eso.

   a) $\frac{5}{6}$ *b*) $\frac{17}{40}$ *c*) $\frac{2}{3}$ *d*) $\frac{19}{50}$ *e*) $\frac{8}{11}$

2. Obtener un numeral decimal finito como aproximación del orden de $\frac{1}{1\,000}$ de cada uno de los siguientes números racionales.

   a) $\frac{5}{9}$ *b*) $\frac{13}{21}$ *c*) $\frac{7}{15}$.

Númerales decimales periódicos

En la sección anterior indicamos que respecto de ciertos números racionales no existen numerales decimales finitos, y esbozamos un método para obtener aproximaciones satisfactorias a dichos números.

Sin embargo, existe una propiedad de los numerales decimales que representan números racionales, que nos permite relacionar todos estos numerales con fracciones.

Volvamos al problema de obtener cierta aproximación a $\frac{3}{14}$, mediante un numeral decimal. Aplicando el algoritmo de la división obtenemos lo siguiente.

$$\begin{array}{r} 0.2142857 \\ 14\ \overline{)\ 3.0000000} \\ \underline{2\,8} \\ 20 \leftarrow \\ \underline{14} \\ 60 \\ \underline{56} \\ 40 \\ \underline{28} \\ 120 \\ \underline{112} \\ 80 \\ \underline{70} \\ 100 \\ \underline{98} \\ 2 \leftarrow \end{array}$$

Observe que hemos obtenido 0.2142857 como una aproximación a $\frac{3}{14}$ y, en el proceso, encontramos otra vez a 2 como residuo. Es apropiado, en este caso, emplear la expresión "otra vez", porque hecha la primera división también obtuvimos 2 como residuo; y después de esto, ya que al dividir 20 entre 14 el resultado fue 1 y el residuo 6, obtendremos este resultado si dividimos una vez más 20 entre 14. Esto es, el siguiente dígito de una aproximación decimal más exacta respecto de $\frac{3}{14}$ será 1. Entonces teníamos

$$0.2142857$$

después tendremos

$$0.21428571.$$

De modo parecido, podemos esperar que el residuo que se obtenga cuando restemos 1×14 de 20 sea nuevamente 6, y el siguiente dígito de mayor aproximación será 4; entonces tenemos

$$0.214285714.$$

Realmente debemos esperar que la secuencia completa de dígitos 142857 se repita, para producir la aproximación

$$0.2142857\ 142857.$$

Y en este momento el residuo en el algoritmo será otra vez 2 y la secuencia volverá a repetirse. Entonces, esta secuencia continuará indefinidamente, esto es

$$\frac{3}{14}=0.2142857142857\overline{142857},$$

en donde la barra encima de 142857 indica que el grupo 142857 se repite indefinidamente. Los numerales decimales que tienen grupos de dígitos que se repiten sin fin, son llamados *decimales periódicos*.

Considérese como otro ejemplo el problema de obtener un numeral decimal equivalente a $\frac{3}{22}$. Tenemos

$$\begin{array}{r@{\,}l}
 & \,0.136 \\
22 & \overline{)\,3.000} \\
 & \,2\,2 \\
\cline{2-2}
 & \,80 \leftarrow \\
 & \,66 \\
\cline{2-2}
 & \,140 \\
 & \,132 \\
\cline{2-2}
 & \,8 \leftarrow
\end{array}$$

donde vemos que el residuo 8 es una repetición del primer residuo. Puesto que este residuo iniciará una duplicación exacta de la primera parte del algoritmo, podemos esperar la repetición de cierto grupo apropiado de dígitos en el cociente —en este caso, el grupo es 36. Por tanto

$$\frac{3}{22}=0.1\overline{36},$$

donde $0.1\overline{36}$ no se considera como una aproximación a $\frac{3}{22}$ sino como un numeral equivalente a la fracción $\frac{3}{22}$. Otros ejemplos son

$$\frac{1}{3}=0.\overline{3},$$

$$\frac{1}{6}=0.1\overline{6},$$

$$\frac{14}{15}=0.9\overline{3},$$

$$\frac{26}{111}=0.\overline{234}.$$

Reflexionando un poco acerca de lo que ocurre en el algoritmo de la división, nos daremos cuenta de que es posible que todo número racional pueda representarse ya sea por un numeral decimal finito o por un decimal periódico. En el proceso de obtener un numeral decimal equivalente a la fracción $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros y b no es 0, se aplica el algoritmo de la división para dividir a entre b. El residuo en cada paso del algoritmo será uno de los números enteros desde 0 hasta uno menor que b; es decir $b-1$. Si el residuo es 0 en cualquier paso, entonces hemos encontrado un numeral decimal finito equivalente a $\frac{a}{b}$. Suponiendo que no se obtenga cero como residuo, entonces tendremos $b-1$ residuos posibles, así que en $b-1$ pasos *tendremos* que repetir algún residuo y una vez que esto suceda habremos obtenido un grupo periódico de dígitos. Consideremos un ejemplo específico, obtengamos un numeral decimal que exprese a $\frac{3}{14}$. Encontramos que es $0.2\overline{142857}$, y repetiremos aquí el algoritmo como referencia y en cada paso se indica el residuo encerrándolo en un círculo.

$$
\begin{array}{r l}
 & 0.2142857 \\
14 & \overline{)\,3.0000000} \\
 & 2\,8 \\ \cline{2-2}
 & 2\,0 \leftarrow \\
 & 1\,4 \\ \cline{2-2}
 & 6\,0 \\
 & 5\,6 \\ \cline{2-2}
 & 4\,0 \\
 & 2\,8 \\ \cline{2-2}
 & 12\,0 \\
 & 11\,2 \\ \cline{2-2}
 & 8\,0 \\
 & 7\,0 \\ \cline{2-2}
 & 10\,0 \\
 & 9\,8 \\ \cline{2-2}
 & 2 \leftarrow
\end{array}
$$

Podíamos haber supuesto, antes de empezar la división, que el residuo, después de la primera sustracción, sería uno de los números enteros del 1 al 13, inclusive. No podíamos esperar que fuera 0 en este caso, porque el divisor contiene un factor que no es potencia de 2 ó de 5; ese factor es 7. Si el primer residuo hubiera sido 3, entonces tendríamos como cociente el decimal periódico $0.\overline{2}$. Sin embargo, el residuo fue en realidad 2. Si el siguiente residuo hubiera sido 2 ó 3, entonces tendríamos un ciclo y hubiéramos obtenido un grupo periódico de dígitos en el cociente; pero el residuo fue 6. Por tanto, continuamos el algoritmo y en cada paso obtenemos como residuo alguno de los números enteros del 1 al 13, inclusive, y en cada uno de estos pasos comprobamos para ver si el número es 3 o si es otro que se ha tenido anteriormente como uno de los residuos. Esto seguramente ocurrirá dentro de las trece primeras divisiones, en realidad esto ocurre en la séptima, en la que aparece el 2 como residuo por segunda vez, y obtenemos el grupo de repetición de dígitos 142857. Una situación semejante se presenta siempre que se divide un número entero entre otro que sea diferente de cero, no obstante el grupo de repetición (periodo) de dígitos puede ser muy grande.

Fracciones equivalentes a decimales periódicos

Dada cualquier fracción que sea la expresión más simple de un número racional, cuyo denominador contenga factores diferentes de 2 y 5, podemos emplear el algoritmo de la división, para obtener un decimal periódico equivalente. Recíprocamente, dado cualquier decimal periódico, es posible obtener una fracción equivalente cuyo numerador y denominador sean números enteros (el denominador diferente de cero), lo que significa que todos estos números decimales son expresiones de números racionales.

Antes de describir en detalle el procedimiento que se emplea para obtener lo anterior en el caso general, examinemos dos ejemplos específicos. Supongamos ahora que hay un número racional expresado por $0.\overline{234}$. Si consideramos que la letra n es otra expresión de ese número, entonces podemos escribir

$$n = 0.234234234\ldots.$$

Si multiplicamos este número por 1 000 podemos representarlo por $1\,000 \times n$ o por $1\,000 \times 0.234234234\ldots$ Puesto que estas expresiones también simbolizan al mismo número tenemos que

$$1\,000 \times n = 1\,000 \times 0.234234234\ldots,$$

$$= 234.234234\ldots.$$

Ahora, puesto que $1\,000 \times n$ seguramente es mayor que n (o $1 \times n$), podemos restar n de $1\,000 \times n$, es decir, en este caso podemos restar $0.234234234\ldots$ de $234.234234234\ldots$ y podemos demostrar que estas diferencias son iguales efectuando la sustracción de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r}1\,000\times n=234.234234\ldots\\ 1\times n=0.234234\ldots\\ \hline 999\times n=234.000000\ldots;\end{array}$$

esto es, si restamos $1\times n$ de $1\,000\times n$, mediante la propiedad distributiva obtenemos como resultado $999\times n$, y si restamos 0.234234234... de 234.234234234..., obtenemos como resultado 234. Además estas diferencias son iguales, porque el número expresado en las sustracciones es el mismo. Ahora, si $999\times n$ y 234 expresan el mismo número, entonces $999\times n$ dividido entre 999 debe ser el mismo número 234 dividido entre 999. O sea

$$\frac{999\times n}{999}=\frac{234}{999}.$$

Pero $\frac{999\times n}{999}$ es otra expresión de $\frac{999}{999}\times n$, y como $\frac{999}{999}=1$, tenemos

$$1\times n=\frac{234}{999}$$

ó

$$n=\frac{234}{999}.$$

Por tanto, hemos demostrado que si se tiene el número racional n, tal que

$$n=0.\overline{234},$$

entonces tenemos

$$n=\frac{234}{999}.$$

A la inversa, mediante el algoritmo de la división es fácil demostrar que

$$\frac{234}{999}=0.\overline{234}.$$

Por tanto, hemos encontrado una fracción equivalente al decimal periódico $0.\overline{234}$. Podemos expresar $\frac{234}{999}$ de una manera más sencilla dividiendo el numerador y denominador entre 9, lo que nos da $\frac{26}{111}$, que es la expresión fraccionaria más simple de n.

Apliquemos el mismo procedimiento, algo modificado, para obtener una fracción equivalente a $0.27\overline{34}$, donde el grupo periódico de dígitos no empieza inmediatamente después del punto decimal. Nuevamente empecemos considerando que la letra n es otra expresión de $0.27\overline{34}$, entonces escribimos

$$n = 0.27343434\ldots$$

Si ahora multiplicamos por 100, tenemos que

$$100 \times n = 100 \times 0.27343434\ldots$$

ó

$$100 \times n = 27.34343434\ldots.$$

Con esto hemos obtenido un número, $100 \times n$, en el que empieza el grupo periódico de dígitos inmediatamente después del punto decimal. Ahora, multipliquemos *este* número por 10^2, porque hay dos dígitos en el grupo periódico (el periodo), y restando:

$$\begin{array}{r} 10\,000 \times n = 2734.\overline{34} \\ 100 \times n = 27.\overline{34} \\ \hline 9900 \times n = 2707. \end{array}$$

Por tanto,

$$n = \frac{2707}{9900},$$

y a la inversa, podemos demostrar con el algoritmo de la división que

$$\frac{2707}{9900} = 0.27\overline{34}.$$

Como último ejemplo, obtengamos una fracción equivalente a $0.5\overline{67}$. Primero suponemos que hay un número racional, n, tal que

$$n = 0.5\overline{67};$$

entonces tenemos

$$\begin{array}{r} 10n = 5.\overline{67} \\ 1000n = 567.\overline{67} \\ 10n = 5.\overline{67} \\ \hline 990n = 562 \end{array},$$

de aquí que

$$n = \frac{562}{990}.$$

Ahora, mediante el algoritmo de la división comprobamos que $0.5\overline{67} = \frac{562}{990}$.

$$\begin{array}{r@{\,}l} & \,0.5\overline{67} \\ 990 & \overline{)\,562.000} \\ & \,495\,0 \\ & \overline{\,67\,00} \leftarrow \\ & \,59\,40 \\ & \overline{\,7\,600} \\ & \,6\,930 \\ & \overline{\,670} \leftarrow \end{array}$$

El procedimiento empleado en los ejemplos anteriores es por completo de orden general y puede aplicarse para obtener una fracción equivalente a cualquier decimal periódico.

Grupo de ejercicios 6

1. Obtenga la fracción, si hay alguna, equivalente al numeral decimal, completando los pasos en cada uno de los siguientes ejercicios:

a)
$$\begin{aligned} n &= 0.\overline{27} \\ 100 \times n &= 27.\overline{27} \\ \underline{\quad\quad} \times n &= \\ \hline 99 \times n &= \\ n &= \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} n &= 0.\overline{158} \\ \underline{\quad\quad} \times n &= \\ \underline{\quad\quad} \times n &= \\ \hline &= \\ n &= \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} n &= 4.\overline{017} \\ \underline{\quad\quad} \times n &= \\ \underline{\quad\quad} \times n &= \\ \hline &= \\ n &= \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} n &= 0.3\overline{246} \\ \underline{\quad\quad} \times n &= \\ 10 \times n &= \\ \hline &= \\ n &= \end{aligned}$$

En cada caso obtenga la expresión más simple del número racional representado por la fracción.

2. Obtenga la fracción que sea la más simple expresión del número racional representado por los siguientes numerales decimales periódicos.

a) $0.\overline{17}$ *b*) $0.\overline{423}$ *c*) $3.\overline{1265}$ *d*) $0.5\overline{34}$

3. Compruebe las respuestas del ejercicio 2, en los apartados *a* y *b*, aplicando el algoritmo de la división.

Numerales decimales no periódicos

En los apartados anteriores vimos que cualquier número racional puede expresarse mediante un decimal finito o mediante un decimal periódico e inversamente, que cualquier decimal finito o periódico representa un número racional. Entonces tenemos

$$\frac{1}{2} \quad \begin{pmatrix}\text{tiene fracción} \\ \text{básica equivalente}\end{pmatrix} = 0.5 \quad \text{(decimal finito)}$$

$$\frac{1}{3} \quad \begin{matrix}\text{(no tiene fracción} \\ \text{básica equivalente)}\end{matrix} = 0.\overline{3} \quad \text{(decimal periódico)}$$

Determinemos ahora la fracción que exprese el número racional

$$n = 0.4\overline{9}.$$

Tenemos que

$$\begin{array}{r} 100 \times n = 49.\overline{9} \\ 10 \times n = \ 4.\overline{9} \\ \hline 90 \times n = 45 \end{array}$$

por tanto

$$n = \frac{45}{90} = \frac{1}{2} = 0.5.$$

La comprobación de este resultado requiere una ligera modificación del algoritmo de la división:

$$\begin{array}{r} 0.4\overline{9} \\ 2\ \overline{)\ 1.00} \\ \underline{8} \\ 20 \leftarrow \\ \underline{18} \\ 2 \leftarrow. \end{array}$$

El número expresado por el decimal periódico $0.4\overline{9}$ es igual al número expresado por el decimal finito 0.5. Aunque esto difícilmente nos sorprende, cuando pensamos en el punto que corresponde a $0.4\overline{9}$ en el eje numérico. Dicho punto debe estar a la derecha del punto que corresponda a $0.4\overline{9}$ ó 0.499 ó 0.4999 o cualquier número racional menor que 0.5; pero, además, no está a la derecha del punto mismo que corresponde a 0.5.

En realidad, cualquier numeral decimal finito, o sea, cualquier numeral decimal expresado únicamente mediante un número dígito de dígitos diferentes de cero, puede considerarse como una clase especial de numeral decimal finito. Entonces tenemos

$$0.5 = 0.5000 \ldots = 0.5\overline{0}, \text{ etc.}$$

De acuerdo con esto, *todo* número racional puede expresarse mediante un numeral decimal periódico. Cada fracción que no es equivalente a una fracción básica corresponde a un decimal periódico, como en

$$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}, \quad \frac{2}{3} = 0.\overline{6},$$

en tanto que cada fracción que es equivalente a una fracción básica corresponde a dos de ellos, como en

$$\frac{1}{8}=0.125\overline{0}=0.124\overline{9}$$

$$\frac{3}{5}=0.6\overline{0}=0.5\overline{9}$$

Desde luego, ordinariamente no expresamos una fracción básica como numeral decimal periódico.

Entonces, si el conjunto de los numerales decimales periódicos se asocia de esta manera con el conjunto de los números racionales ¿existe algún decimal no periódico e infinito? De ser así ¿es un numeral? Digamos ¿es la expresión de alguna clase de número?

Sí existen expresiones decimales no periódicas, y también reglas para obtener algunas de ellas. Un ejemplo de este tipo de expresiones es el siguiente:

$$0.12112111211112\ldots,$$

en la que se aumenta un 1 en forma progresiva en cada grupo de numerales 1 que siguen después de cada numeral 2. Si hay un punto en el eje numérico que corresponda a esta expresión, se localizará a la derecha del punto correspondiente a 0.1, a la derecha del punto correspondiente a 0.12, etc. Pero a la izquierda del punto correspondiente a

$$0.2, \quad ó \quad 0.13, \quad ó \quad 0.122, \text{ etc.}$$

Es fundamental suponer que existe tal punto, y que corresponde a un número que no es un número racional —puesto que ese número se simboliza mediante un numeral decimal infinito y no periódico. A esta clase de números los llamamos números *irracionales.*

Estamos familiarizados con algunos de estos números. Uno de éstos:

$$\pi=3.14159\ldots,$$

es la razón de la longitud de la circunferencia de un círculo respecto de su diámetro. Otro es

$$\sqrt{2}=1.41428\ldots$$

En el cuaderno 6: *Números racionales,* aprendimos que el conjunto de los números racionales es *denso,* o sea, que entre dos números racionales cualesquiera, diferentes entre sí, siempre existe un tercer número racional y, en consecuencia, un número infinito de números racionales. También el conjunto de los números irracionales es denso en el eje numérico y, en cierto sentido, hay más números irracionales que racionales.

Los números racionales y los números irracionales juntos forman el *sistema de los números reales*, cuya comprensión es fundamental para manejar el análisis matemático.

¿Por qué estamos interesados en los números que son capaces de expresar magnitudes físicas con más precisión de la que sería posible que obtuviéramos al medirlas? Es un hecho singular y maravilloso que como fundamento de sus medidas y observaciones relativamente crudas del ambiente físico, el matemático aplicado y el científico, frecuentemente construye *modelos matemáticos idealizados,* los analiza y aplica los resultados a ese ambiente en formas que él nunca podría hacerlo y que nunca se le ocurriría, fundado sólo en sus observaciones y medidas. Este ha sido un ingrediente esencial en gran parte de nuestro progreso científico. Nos afecta a todos porque es parte de nuestra cultura y de nuestra vida diaria. Nos ha dado a conocer la energía atómica, ha ayudado a extinguir enfermedades y algún día nos ayudará a viajar a la Luna y otros planetas.

RESPUESTAS A LOS GRUPOS DE EJERCICIOS

Grupo de ejercicios 1

1. Propiedad conmutativa de la adición.
   Propiedad conmutativa de la multiplicación.
   Elemento idéntico de la multiplicación.
   Elemento idéntico de la adición.
   Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición.
   Propiedad recíproca de los números racionales.
   Propiedad asociativa de la adición.

2. a) $\frac{6}{7}=\frac{9\times 6}{9\times 7}=\frac{54}{63}$ y $\frac{8}{9}=\frac{7\times 8}{7\times 9}=\frac{56}{63}$

   b) $\frac{9\times 6}{9\times 7}<\frac{7\times 8}{7\times 9}$, ó $\frac{54}{63}<\frac{56}{63}$

   c) $9\times 6<7\times 8$, ó $54<56$

   d) $9\times 6<7\times 8$

3. a) $\frac{3}{5}=\frac{7\times 3}{7\times 5}=\frac{21}{35}$ y $\frac{4}{7}=\frac{5\times 4}{5\times 7}=\frac{20}{35}$

   b) $\frac{7\times 3}{7\times 5}>\frac{5\times 4}{5\times 7}$, ó $\frac{21}{35}>\frac{20}{35}$

   c) $7\times 3>5\times 4$, ó $21>20$

   d) $7\times 3>5\times 4$

4. $2 \times 15 = 6 \times 5$

5. a) $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$ c) $\frac{5}{11} > \frac{3}{7}$ e) $\frac{5}{2} = \frac{15}{6}$

b) $\frac{4}{9} = \frac{12}{27}$ d) $\frac{7}{3} > \frac{11}{5}$ f) $\frac{8}{13} > \frac{5}{17}$

Grupo de ejercicios 2

1. $(4,7)$; $(9,5)$; $(3,1)$; $(0,8)$; $(5,9)$; $(3,8)$.

2. $\frac{5}{12}$ $\frac{4}{11}$

$5 \times 11 > 4 \times 12$

$\frac{5}{12} > \frac{4}{11}$

3. $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}$

$\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{3 \times 3}{3 \times 4} - \frac{4 \times 2}{4 \times 3} = \frac{9-8}{12} = \frac{1}{12}$

$\frac{6}{5} \times \frac{1}{7} = \frac{6 \times 1}{5 \times 7} = \frac{6}{35}$

$\frac{3}{4} \div \frac{5}{11} = \frac{3}{4} \times \frac{11}{5} = \frac{3 \times 11}{4 \times 5} = \frac{33}{20}$

Grupo de ejercicios 3

1. a) $\{(2,3), (4,6), (6,9), (8,12), (10,15) \ \ldots\}$

b) $\{(3,5), (6,10), (9,15), (12,20), (15,25) \ \ldots\}$

c) $\left\{\frac{5}{6}, \frac{10}{12}, \frac{15}{18}, \frac{20}{24}, \frac{25}{30} \ \ldots\right\}$

d) $\left\{\frac{4}{3}, \frac{8}{6}, \frac{12}{9}, \frac{16}{12}, \frac{20}{15} \ \ldots\right\}$

2. a) $4+\frac{1}{3}$, $3+\frac{4}{3}$, $2+\frac{7}{3}$, o $4+\frac{2}{6}$, $3+\frac{16}{12}$, etc.

b) $6+\frac{1}{3}$, $5+\frac{8}{6}$, $4+\frac{14}{6}$, o $6+\frac{4}{12}$, $5+\frac{24}{18}$, etc.

c) $7+\frac{1}{3}$, $6+\frac{4}{3}$, $5+\frac{7}{3}$, o $7+\frac{3}{9}$, $6+\frac{16}{12}$, etc.

3. a) $3\frac{2}{3}$ b) $4\frac{2}{5}$ c) $2\frac{6}{7}$

Grupo de ejercicios 4

1. a) $(2\times 10^1)+(1\times 10^0)+\left(4\times\frac{1}{10^1}\right)+\left(7\times\frac{1}{10^2}\right)$

b) $(1\times 10^2)+(6\times 10^1)+(5\times 10^0)+\left(0\times\frac{1}{10^1}\right)+\left(3\times\frac{1}{10^2}\right)+\left(6\times\frac{1}{10^3}\right)$

c) $(8\times 10^1)+(0\times 10^0)+\left(1\times\frac{1}{10^1}\right)+\left(0\times\frac{1}{10^2}\right)+\left(8\times\frac{1}{10^3}\right)+\left(9\times\frac{1}{10^4}\right)$

d) $\left(8\times\frac{1}{10^1}\right)+\left(0\times\frac{1}{10^2}\right)+\left(7\times\frac{1}{10^3}\right)$

2. a) $\frac{417}{1000}$ b) $\frac{3208}{1000}$ c) $\frac{6}{100}$

d) $\frac{8005}{1000}$ e) $\frac{1412}{100}$ f) $\frac{10,075}{1000}$

3. a) 0.169 b) 0.0205 c) 0.024

d) 0.07 e) 10.5 f) 0.00019

4. a) $2\times2\times2\times5$ or $2^3\times5$ b) $2\times2\times2\times2\times5$ or $2^4\times5$

c) $2\times2\times2\times2\times2\times5$ or $2^5\times5$ d) $2\times2\times2\times2\times2\times5\times5$ o $2^5\times5^2$

e) $2\times2\times5$ or $2^2\times5$ f) $2\times5\times5$ or 2×5^2

5. a) $\frac{3}{2\times5^2}=\frac{3}{2\times5^2}\times\frac{2}{2}=\frac{3\times2}{2^2\times5^2}=\frac{6}{100}=0.06$

b) $\frac{13}{2^4\times5}\times\frac{5^3}{5^3}=\frac{13\times125}{10,000}$

$=\frac{1625}{10,000}$

$=0.1625$

c) $\frac{9}{2^3\times5}\times\frac{5^2}{5^2}=\frac{9\times25}{1000}$

$=\frac{225}{1000}$

$=0.225$

d) $\frac{11}{5^2}\times\frac{2^2}{2^2}=\frac{44}{100}$

$=0.44$

e) $\frac{13}{2^2\times5}\times\frac{5}{5}=\frac{65}{100}$

$=0.65$

f) $\frac{7}{120}=\frac{7}{2^3\times3\times5}$

Puesto que 120 tiene como factor a 3, la fracción $\frac{7}{120}$ no tiene una fracción básica equivalente.

Grupo de ejercicios 5

1. *a*) 6 tiene como factor a 3. *c*) 3 tiene como factor a 3.

   e) 11 tiene como factor a 11.

   Si el denominador tiene un factor diferente de 2 ó 5, y la fracción está expresada en su forma más simple, la fracción no tiene un numeral decimal finito equivalente.

2. a)
$$\begin{array}{r} 0.555\\ 9\,\overline{)\,5.000} \\ \underline{4\,5}\\ 50 \\ \underline{45}\\ 50\\ \underline{45}\\ 5\end{array}$$

   b)
$$\begin{array}{r} 0.619\\ 21\,\overline{)\,13.000} \\ \underline{12\,6}\\ 40 \\ \underline{21}\\ 190\\ \underline{189}\\ 1\end{array}$$

   c)
$$\begin{array}{r} 0.466\\ 15\,\overline{)\,7.000} \\ \underline{6\,0}\\ 1\,00 \\ \underline{90}\\ 100\\ \underline{90}\\ 10\end{array}$$

Grupo de ejercicios 6

1. a)
$$\begin{aligned} n &= 0.\overline{27}\\ 100\times n &= 27.\overline{27}\\ 1\times n &= 0.\overline{27}\\ 99\times n &= 27\\ n &= \frac{27}{99}\\ \text{or } n &= \frac{3}{11}\end{aligned}$$

   b)
$$\begin{aligned} n &= 0.\overline{158}\\ 1000\times n &= 158.\overline{158}\\ 1\times n &= 0.\overline{158}\\ 999\times n &= 158\\ n &= \frac{158}{999}\end{aligned}$$

   c)
$$\begin{aligned} n &= 4.\overline{017}\\ 1000\times n &= 4017.\overline{017}\\ 1\times n &= 4.\overline{017}\\ 999\times n &= 4013\\ n &= \frac{4013}{999}\end{aligned}$$

   d)
$$\begin{aligned} n &= 0.3\overline{246}\\ 10{,}000\times n &= 3246.\overline{246}\\ 10\times n &= 3.\overline{246}\\ 9990\times n &= 3243\\ n &= \frac{3243}{9990}\\ \text{or } n &= \frac{1081}{3330}\end{aligned}$$

2\. a)

$$\begin{aligned} n &= 0.\overline{17} \\ 100\times n &= 17.\overline{17} \\ 1\times n &= 0.\overline{17} \\ 99\times n &= 17 \\ n &= \frac{17}{99} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} n &= 0.\overline{423} \\ 1000\times n &= 423.\overline{423} \\ 1\times n &= 0.\overline{423} \\ 999\times n &= 423 \\ n &= \frac{423}{999} \\ \text{or } n &= \frac{47}{111} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} n &= 3.\overline{1265} \\ 10.000\times n &= 31\,265.\overline{1265} \\ 1\times n &= 3.\overline{1265} \\ 9999\times n &= 31262 \\ n &= \frac{31262}{9999} \\ &= \frac{2842}{909} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} n &= 0.5\overline{34} \\ 1000\times n &= 534.\overline{34} \\ 10\times n &= 5.\overline{34} \\ 990\times n &= 529 \\ n &= \frac{529}{990} \end{aligned}$$

3\. a)

$$\begin{array}{r@{\,}r l} & 0.\overline{17} & \\ 99\ \big) & 17.00 & \leftarrow \\ & 9\,9 & \\ \hline & 7\,10 & \\ & 6\,93 & \\ \hline & 17 & \leftarrow \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r@{\,}r l} & 0.\overline{423} & \\ 111\ \big) & 47.0 & \leftarrow \\ & 44\,4 & \\ \hline & 2\,60 & \\ & 2\,22 & \\ \hline & 380 & \\ & 333 & \\ \hline & 47 & \leftarrow \end{array}$$

Esta obra terminó de imprimirse el día 29 de febrero de 1968, en los talleres de *Programex Editora, S. A.*, calle Mesones número 62, letra E, México 1, D. F.
Se tiraron 6 000 ejemplares.

enteros. 3. Sistemas de numeración para los números enteros. 4. Algoritmos de las operaciones con números enteros. 5. Números y sus factores. 6. Números racionales. 7. Sistemas de numeración para los números racionales y 8. Proposiciones numéricas.

OTROS TITULOS

Síntesis de matemáticas
Primer curso
Texto y cuaderno de trabajo
Pablo Cantú Villarreal

Un curso formado por texto y cuaderno de trabajo que de acuerdo con los programas vigentes de la SEP, proporciona al maestro la facilidad de seguirlo sin retrasos ni adelantos. Ha sido redactado con profundo sentido didáctico y amplio conocimiento y experiencia en la materia.
El cuaderno de trabajo, de reciente aparición, complementa al texto con el gran número de variados y oportunos ejercicios que contiene, los cuales simplifican la labor del maestro y hacen más efectivo el aprendizaje del alumno. Todas las hojas son desprendibles y al final de cada ejercicio aparece una tabla de concordancia entre los aciertos y los porcentajes correspondientes con objeto de facilitar el control del aprendizaje y calificar con facilidad y rapidez.

Texto 272 páginas - Rústica - 15 x 22 cm
Cuaderno de trabajo - 184 páginas - Rústica - 21 x 27 cm

Cómo plantear y resolver problemas
G. Polya

He aquí un pequeño tesoro para los maestros y estudiantes de matemáticas, para los aficionados y en general, para todo aquel que quiera saber cómo resolver problemas.
Es sumamente interesante porque, además del aspecto nuevo que presenta de las matemáticas, su proceso de invención, como ciencia experimental e inductiva, proporcionando no la solución estereotipada de los problemas, sino los procedimientos originales de cómo se llegó a su solución, da los caminos para resolver problemas en cuanto tales y dispone los elementos del pensamiento de tal manera que instintivamente actúen cuando se presente un problema por resolver.

216 páginas - Rústica - 15 x 22 cm